סמסטר א'

אלגברא לינארית 2

מועד א'

כז בשבט

12.02.18

מרצה: פרופ' בוריס קוניאבסקי

מתרגלים: אחיה בר-און, תמר נחשוני.

מספר הקורס: 88-113-05

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשבון רגיל

<u>הנחיות:</u>

ענו על שלוש שאלות. אם עניתם על יותר שאלות מהנדרש – נא ציינו אילו שאלות הן לבדיקה; בהעדר אמירה מפורשת תיבדקנה השאלות הראשונות **.נא לענות על כל שאלה בעמוד נפרד**. .נא להסביר ולנמק בבירור את כל התשובות. ערך כל שאלה הוא 32 נק'. תקבלו 4 נק' עבור נקיון.

.בהצלחה!

שאלה	**ניקוד**
1 ✓	
2	
3	
4	
נקיון	

שאלה 1

נתונה $A=\begin{pmatrix}1 & a & 25\\ 0 & a & a+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

א. לאילו ערכים של a המטריצה A לכסינה? (15 נק')

ב. עבור כל ערך של a מסעיף א', מצאו מטריצה הפיכה P_a ומטריצה אלכסונית D_a כך ש-
$D_a=P_a^{-1}AP_a$ (10 נק')

ג. לשאר הערכים, הציגו את צורת ז'ורדן של A. (7 נק')

$P_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-a)$

$a\neq 1$;

$V_1=N\begin{pmatrix}0 & a & 25\\ 0 & a-1 & a+1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}0 & 1 & 24-a\\ 0 & 0 & a^2-24a+25\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

אם $a=12\pm\sqrt{119}$ אז $V_1=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\a-24\\1\end{pmatrix}\right\}$

אם $a\neq 12\pm\sqrt{119}$ אז $V_1=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$V_a=N\begin{pmatrix}1-a & a & 25\\ 0 & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 1-a\end{pmatrix}=sp\left\{\begin{pmatrix}a\\a-1\\0\end{pmatrix}\right\}$

לכסינ עבור $a=12\pm\sqrt{119}$

$a=1$;

$V_1=N\begin{pmatrix}0 & 1 & 25\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=sp\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

לא לכסינ

ב. לכסינה עבור $a=12\pm\sqrt{119}$ [illegible]

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a-24 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ג. עבור $a=1$ יש ע״ע יחיד $\lambda=1$ עם
ר״ג 1 לכן צורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

עבור $a\neq 1, 12\pm\sqrt{119}$ יש שני ע״ע $1,a$
וצורת הז'ורדן היא

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ \hline & & a \end{array}\right)$$

שאלה 2

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה אינסופי. יהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי כך שמתקיים $T^2=T$.

א. הראו כי T ניתן לליכסון. (10 נק')

ב. הראו כי האופרטור $T+I$ הפיך ומצאו את הפולינום $f(x)$ מדרגה נמוכה ביותר כך ש- $f(T)=(T+I)^{-1}$ (10 נק')

ג. נניח בנוסף ש- V מרחב מכפלה פנימית. הראו כי $ker(T)$ הוא המשלים האורתוגונלי ל- $im(T)$ אם ורק אם האופרטור T צמוד לעצמו.

רמז. הראו כי כל וקטור ב- $ker(T)$ הוא בצורה $v-T(v)$. (12 נק')

א. $f(x)=x^2-x=x(x-1)$ מאפס את T

לכן $m_T(x)=x^{0/1}(x-1)^{0/1}$ כל מקדם הוא מעלה שונים!!

ולכן לכסין.

ב. נחפש $T^{-1}=aT+bI$

$(T+I)\cdot(aT+bI)\overset{?}{=}I$

$aT^2+(a+b)T+bI\overset{?}{=}I$

$(2a+b)T+bI=I$

$b=1$

$a=\frac{1}{2}$

לכן $T^{-1}=-\frac{1}{2}T+I$

ב. (⇒) אם $T=T^*$ אז נוכיח ש- $\ker(T^*) \perp Im(T)$

יהי $T^*(u)=0 \Leftarrow u \in \ker(T^*)$

ו- $\exists v: T(v)=w \Leftarrow w \in Im(T)$

$$\langle w,u\rangle = \langle Tv,u\rangle = \langle v, T^*(u)\rangle = (v,0) = 0$$

(⇐) נתון $\ker(T) \perp Im(T)$ ו- $T=T^2$

צ"ל $T=T^*$

$$\langle Tv,w\rangle = \langle T(v), w-T(w)+T(w)\rangle = \langle T(v), \underbrace{w-T(w)}_{\in \ker(T)}\rangle + \langle T(v),T(w)\rangle =$$

לכן המכפלה שווה ל-0

$$= \langle T(v),T(w)\rangle = \langle T(v)-v+v, T(w)\rangle = \langle \underbrace{T(v)-v}_{\in \ker T}, T(w)\rangle + \langle v, T(w)\rangle =$$

לכן המכפלה שווה ל-0

$$= \langle v, T(w)\rangle$$

מכאן $T^*=T$.

שאלה 3

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה מרוכבים. יהי B בסיס של V. תהי G מטריצת גרם של מכפלה פנימית יחסית ל-B. יהי T אופרטור לינארי ב-V. תהי A המטריצה המייצגת של T יחסית ל-B. יהי T^* האופרטור הצמוד ל- T.

א. מצאו את המטריצה המייצגת של T^* יחסית ל-B. (16 נק')

ב. יהי $E = \{e_1, e_2\}$ בסיס אורתונורמלי של V. יהי $B = \{e_1, e_2 + e_1\}$ בסיס אחר. תהי $A = [T]_B = \begin{pmatrix} i & 2i \\ -i & -i \end{pmatrix}$. האם האופרטור T צמוד לעצמו? (16 נק')

$$[T^*]_B^B = [I]_B^S \, [T^*]_S^S \, [I]_S^B = [I]_B^S \, [T]_S^{S*} \, [I]_S^B =$$

$$= [I]_B^S \left([I]_S^B [T]_B^B [I]_B^S\right)^* [I]_S^B = [I]_B^S \, [I]_B^{S*} \, [T]_B^{B*} \, [I]_S^{B*} \, [I]_S^B =$$

$$= \overline{G_B}^{-1} \cdot [T]_B^{B*} \, \overline{G_B}$$

$$G_B = [I]_S^{B\,t} \cdot \underset{\overset{\|}{I}}{G_S} \, \overline{[I]_S^B} = [I]_S^{B\,t} \, \overline{[I]_S^B}$$

$$\overline{G_B} = [I]_S^{B*} [I]_S^B$$

$$\overline{G_B}^{-1} = [I]_B^S \, [I]_B^{S*}$$

$$[T]_E^E = [I]_E^B \, [T]_B^B \, [I]_B^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 2i \\ -i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T^*]_E^E = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = [T]_E^E$$

5/6

$$\Downarrow$$

$$T^* = T$$

שאלה 4

שאלות "הוכח או הפרך". הניקוד על כל שאלה הוא 8 נקודות. נמקו היטב את תשובותיכם!

א. לאופרטור הפיך T ולאופרטור הפוך לו T^{-1} יש אותם וקטורים עצמיים.

נכון

$Tv = \lambda v$

$\frac{1}{\lambda} v = T^{-1} v$

$\frac{1}{\lambda}$ הינו ע"ע של T^{-1} עם אותו ו"ע

ב. יהי $V = M(n,C)$ מרחב המטריצות המרוכבות הריבועיות מסדר n. תהי $A \in M(n,C)$ ונגדיר את האופרטור הלינארי $T: V \to V$ ע"י הנוסחא $T(X) = AX$. אזי הפולינום המינימלי של T זהה לפולינום המינימלי של A.

נכון, יהי $m_A(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ פולינום מינימלי

של A כלומר $\sum_{i=1}^{n} a_i A^i = 0$

אז נראה ש- $m_A(x)$ מאפס גם את T

לכל B! $m_A(T)=\sum_{i=0}^{n} a_i T^i = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i B = 0\cdot B = 0$

יהי $m_T(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ פולינום מינימלי

של T כלומר $\sum_{i=1}^{n} a_i T^i(B) = 0$; $\forall B$

נראה ש- $m_T(x)$ מאפס את A

$0=\sum_{i=1}^{n} a_i T^i(B)=\sum_{i=1}^{n} a_i A^i B$

לכל B בפרט עבור $B=I$ נקבל

$0=\sum_{i=1}^{n} a_i A^i$

כלומר $P(A)=0 \iff P(T)=0$ ולכן יש

להם אותו פולינום מינימלי.

ג. יהי V מרחב מכפלה פנימית, U תת-מרחב, W המשלים האורתוגונלי ל- U . יהי T אופרטור לינארי ב-V.. יהי T^* האופרטור הצמוד ל- T . אם U אינווריאנטי יחסית ל- T , אזי W אינווריאנטי יחסית ל-T^*

יהי $u\in U$ אזי $Tu\in U$

יהי $w\in W=U^\perp$ צ"ל $T^*(w)\in W=U^\perp$

$$0=\langle T(w),w\rangle=\langle u,T^*(w)\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$u\perp T^*(w)$$

$$\Downarrow$$

$$T^*(w)\in U^\perp=W$$

ד. יהי V מרחב מכפלה פנימית, יהי T אומרטור צמוד לעצמו ב-V. אזי $\langle v,w\rangle_T = \langle T(v),w\rangle$ גם מכפלה פנימית.

לא נכון, ניקח $T=-Id$

אז

$\langle v,v\rangle_T = \langle Tv,v\rangle = \langle -v,v\rangle = -\langle v,v\rangle < 0$

וכן

$\langle T(v),w\rangle = \langle -v,w\rangle = -\langle v,w\rangle = \langle v,-w\rangle = \langle v,T^*w\rangle$

וכן $T^*=T$ כלומר T צמוד לעצמו.