תרגיל בית 1- פתרון

1. יהיו $\mathfrak{A}_1$ ו $\mathfrak{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב X . הראו כי אם $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \sigma\left(\mathfrak{A}_1\right)$ אזי נובע כי $\sigma\left(\mathfrak{A}_1\right) = \sigma\left(\mathfrak{A}_2\right)$.

פתרון: מכיוון ש $\mathfrak{A}_2 \subseteq \sigma\left(\mathfrak{A}_1\right)$ נובע כי

$\sigma\left(\mathfrak{A}_2\right) \subseteq \sigma\left(\mathfrak{A}_1\right)$: מכיוון ש $\mathfrak{A}_2 \subseteq \sigma\left(\mathfrak{A}_1\right)$ נובע כי הסיגמא אלגברה המינימלית שמכילה את $\mathfrak{A}_2$ מוכלת ב $\sigma\left(\mathfrak{A}_1\right)$, כלומר - $\sigma\left(\mathfrak{A}_2\right) \subseteq \sigma\left(\mathfrak{A}_1\right)$.

$\sigma\left(\mathfrak{A}_2\right) \supseteq \sigma\left(\mathfrak{A}_1\right)$: נובע מכך ש $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$.

2. הראו כי העוצמה("מספר" האיברים בקבוצה) של סיגמא אלגברה הינו סופי או לא בן מנייה, כלומר אם S הינה סיגמא אלגברה אזי $|S| \neq \aleph_0$.

פתרון: ראינו כבר סיגמא אלגברות בגודל סופי. תהי S סיגמא אלגברה, נניח בשלילה כי הגודל שלה הוא בן מנייה ולא סופי. אז ניתן למצוא סדרה של קבוצות שונות $\{A_n\}$ מהן אפשר ליצור סדרה $\{E_n\}$ של קבוצות זרות. מכיוון שאיחוד בן מנייה של קבוצות בסיגמא אלגברה הינו קבוצה מדידה, ניתן לבחור מתוך הסדרה איזה קבוצה להכניס ואיזו לא, מספר האפשרויות הינו $\left|2^{\mathbb{N}}\right|$.

3. נניח ו $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ הינן מידות על מרחב מדיד (X, S) ו $\mu_n(A)\uparrow$ לכל $A \in S$ אזי $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$. האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

פתרון: ברור כי $\mu(A) \geq 0$ לכל $A \in S$ וכי $\mu(\varnothing) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(\varnothing) = 0$. נראה כי גם התכונה השלישית מתקיימת.

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{j\to\infty} \mu_j\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j(A_n)$$

נסמן את הסכומים החלקיים $c_{ij} = \sum_{n=1}^{i} \mu_j(A_n)$. מתקיים

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j(A_n) = \lim_{j\to\infty} \lim_{i\to\infty} c_{ij} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} c_{ij}$$

$$= \sup_{i,j\in\mathbb{N}} c_{ij} = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} c_{ij} = \lim_{j\to\infty} \lim_{i\to\infty} c_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{j\to\infty} \mu_j(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

4. יהי (X,S,μ) ממ"ח הוכיחו כי הבאים שקולים:

א. לכל $E\in S$ מתקיים $\mu(E)=\sup\{\mu(F):F\subseteq E,F\in S,\mu(F)<\infty\}$.

ב. אם $E\in S$ ו $\mu(E)=\infty$ אזי קיימת $E\supseteq G\in S$ כך ש $0<\mu(G)<\infty$.

א גורר ב : נניח כי לא קיימת G כזאת, אזי נקבל כי

$$\mu(E)=\sup\{\mu(F):F\subseteq E,F\in S,\mu(F)<\infty\}=0$$

בניגוד לכך ש $\mu(E)=\infty$.

ב גורר א: אם המידה של E סופית זה מיידי. נניח כי $\mu(E)=\infty$ ונניח בשלילה $\sup\{\mu(F):F\subseteq E,F\in S,\mu(F)<\infty\}=M<\infty$, אז נוכל למצוא סדרה של קבוצות $\{G_n\}$ כך ש $\mu(G_n)>M-\frac{1}{n}$. נגדיר $G=\bigcup G_n$ ונקבל כי בהכרח $\mu(G)=M$ וכן $G\subseteq E$. נסתכל על הקבוצה $A=E/G$ ונראה כי $\mu(A)=\infty$. מכאן קיימת $G'\subseteq A$ כך ש $G'\cap G=\varnothing$ וגם $0<\mu(G')<\infty$ מכאן כי $\mu(G'\cup G)>M$ בסתירה להנחה ומכאן כי $M=\infty$.