

הגדרה: פונקציה רציונלית ב n משתנים $R(x_1, \dots, x_n)$ היא פונקציה מהצורה $\frac{p(x_1, \dots, x_n)}{q(x_1, \dots, x_n)}$ כאשר

p, q פולינומים.

דוגמא: $f(x, y, z) = \frac{z^2x + xy + 4}{xyz - y^8}$ היא רציונלית ב x, y, z

קל לודא את התכונות הבאות:

1. הרכבה וכפל של רציונליות הינה רציונלית
2. נגזרת של רציונלית הינה רציונלית

בנוסף, נזכור שאנו יודעים לחשב אינטגרלים של רציונליות במשתנה אחד $R(x)$.

לכן, בהנתן רציונלית מהצורה $R(f_1(x), \dots, f_n(x))$ נחפש הצבה $x = g(t)$ שעונה על התכונות הבאות:

1. $g(t)$ הפיכה בתחום מסוים (בתחום זה נפתור את האינטגרל)
2. $g'(t) = R(t)$ כלומר הנגזרת הינה רציונלית. שימו לב שזה בכלל לא אומר ש $g(t)$ רציונלית.
3. $\forall i: f_i(x) = R(t)$ כלומר כל המשתנים הופכים לפונקציות רציונליות ב t לאחר ההצבה

נובע מזה ש $\int R(f_1(x), \dots, f_n(x))dx = \int R(R(t), \dots, R(t))g'(t)dt = \int R(t)dt$ לפי התכונות של הרכבת רציונליות, ואינטגרל כזה אנחנו יודעים לפתור. (המעבר הראשון הוא למעשה מימין לשמאל כמו בתרגיל הבית על ידי הצבה $x = g(t)$.)

הערה חשובה: למרות שהצבה שעונה על התכונות האלה תמיד תעבוד, לפעמים היא תעביר אותנו לרציונלית עם פולינומים בחזקות גבוהות שקשה לפתור אותן. במקרה כזה אולי עדיף למצוא הצבה אחרת (אין שום חוק שאומר שיש רק הצבה אחת אפשרית).

הצבות אוניברסאליות ידועות:

• $\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_k} \right] dx$ יהיה $r = \gcd(n_1, \dots, n_k)$ כלומר המכנה

המשותף המינימלי, נציב $\frac{ax+b}{cx+d} = t^r$.

• (אווילר 1) $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ כאשר $ax^2 + bx + c$ אי פריק. נציב

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$ ולכן $x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}$ (אם $a < 0$ הפונקציה המקורית לא

מוגדרת בשום מקום).

• (אווילר 2) $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ כאשר $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ נציב

$$x = \frac{t^2 \beta - a\alpha}{t^2 - a} \text{ לקבל } \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = t(x - \beta)$$

• $\int R(\sin x, \cos x) dx$ נציב $t = \tan \frac{x}{2}$ ולכן $x = 2 \arctan t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

• $\int R(\sin x) \cos x dx$ נציב $t = \sin x$

• $\int R(\cos x) \sin x dx$ נציב $t = \cos x$

• $\int R(\tan x) dx$ נציב $x = \arctan t$

• $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ נציב $x = a \sin t$

• $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ נציב $x = a \tan t$

• $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ נציב $x = \frac{a}{\cos t}$

• וכדומה...

הצבה נוספת:

• $\int \sin^m x \cos^n x dx$ כאשר m אי זוגי נציב $t = \cos x$, כאשר n אי זוגי נציב $t = \sin x$.

כאשר שניהם זוגיים נוריד את החזקות על ידי זהויות טריגונומטריות

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$