בס"ד

פתרון תרגיל 8 באלגברה לינארית

שאלה 1

א. תהי:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix}$$

כאשר:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = (3)$$

נחשב את הפולינומים האופייני והמינימלי של המטריצות הללו:

$$P_1(t) = M_1(t) = (t+1)^2$$

$$P_2(t) = M_2(t) = (t+1)^2(t-3)$$

$$P_3(t) = M_3(t) = t-3$$

לכן הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של A הם:

$$P(t) = (t+1)^4(t-3)^2$$

$$M(t) = (t+1)^2(t-3)$$

כיון שיש שני ערכים עצמיים שונים, צורת ז'ורדן G של A מכילה שני בלוקים גדולים:

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & \\ & G_2 \end{pmatrix}$$

נחשב את G_1 ו-G_2 בהנחה שהם שייכים לערכים עצמיים 1- ו-3 בהתאמה.

חישוב G_1

הריבוב האלגברי של הערך העצמי $\lambda=-1$ הוא 4, ולכן G_1 היא
מטריצה מסדר 4. החזקה בה מופיע הגורם $t+1$ בפולינום
המינימלי היא 2, ולכן בלוק ז'ורדן הגדול ביותר הוא
$J_2(-1)$. הריבוב הגיאומטרי של $\lambda=-1$ שווה ל-2 (בדוק) ולכן:

$$G_1 = \begin{pmatrix} J_2(-1) & \\ & J_2(-1) \end{pmatrix}$$

חישוב G_2

הריבוב האלגברי של $\lambda=3$ הוא 2, ולכן G_1 מסדר 2. הבלוק
הגדול ביותר ב-G_2 הוא מסדר 1 (שכן חזקת הגורם $t-3$
בפולינום המינימלי שווה לאחד), ולכן:

$$G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

צורת ז'ורדן של A היא אפוא:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ 0 & -1 & & & & \\ & & -1 & 1 & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

ב. תהי:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

הפולינום האופייני של B הוא:

$$P(t) = (t+2)(t-1)^3$$

ולכן צורת ז'ורדן של B היא אחת משלוש המטריצות:

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iii)} \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

קל לבדוק, שהריבוב הגיאומטרי של הערך העצמי $\lambda=-1$ הוא 2,
ולכן צורת ז'ורדן של B היא המטריצה (ii).
שים לבו הפעם "הסתדרנו" בלא שמצאנו מראש את הפולינום
המינימלי של B. בדיעבד, פולינום זה הוא הפולינום
המינימלי של המטריצה (ii) דהיינו:

$$(t+2)(t-1)^2$$

2

א. תהי:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

הפולינום האופייני הוא:

$$P(t) = \begin{vmatrix} t-5 & -4 & -3 \\ 1 & t & 3 \\ -1 & 2 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+2)(t-4)^2$$

נחשב את הריבוב הגיאומטרי של הערך העצמי $\lambda=4$:

$$A-4I = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

הדרגה של $A-4I$ שווה ל-2, ולכן הריבוב הגיאומטרי הוא 1, הווה אומר - מספר בלוקי ז'ורדן השייכים ל-$\lambda=4$ שווה ל-1. מכאן שצורת ז'ורדן של A היא:

$$\left(\begin{array}{c|cc} -2 & & \\ \hline & 4 & 1 \\ & 0 & 4 \end{array}\right)$$

ב. תהי:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

הפולינום האופייני של B הוא $(t-1)^3$. הדרגה של:

$$B-I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

שווה ל-1, ולכן מספר בלוקי ז'ורדן שווה ל-$3-1=2$. מכאן שצורת ז'ורדן של B היא:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ \hline & & 1 \end{array}\right)$$

$E: A^{k-1}v$

$A^{k-2}v$

<u>תזכורת מהוכחת המשפט על קיום צורת ז'ורדן – איך מוצאים בסיס מפורשות?</u>

עבור נילפוטנטית – מתקיים:

$$\operatorname{Im} A^{k-1} \subseteq KerA \cap \operatorname{Im} A^{k-2} \subseteq KerA \cap \operatorname{Im} A^{k-3} \subseteq \ldots \subseteq KerA \cap \operatorname{Im} A \subseteq KerA$$

ראשית מוצאים בסיס עבור מה שהכי בצד שמאל. מוצאים את הבסיס כך שהוא יהיה מהצורה $T^{k-1}v$ (או באופן כללי $T^{t}v$), ולוקחים יחד איתו את כל הוקטורים ה"קודמים", כלומר $T^{t-1}v, T^{t-2}v, \ldots Tv, v$ עד ל-v!

עכשיו משלימים את הבסיס (רק את הבסיס, לא את הוקטורים הנוספים שלקחנו) לבסיס עבור מה שיותר ימינה. וכך ממשיכים הלאה. עד שמגיעים לבסיס עבור $KerA$ (ושם אין וקטורים "קודמים"). סה"כ כל הוקטורים שקיבלנו בכל אחד מהשלבים (והוקטורים ה"קודמים" שלהם) מהווים את הבסיס.
נשים אותם בעמודות המטריצה ונקווה לטוב.

<u>תרגיל 3</u> תהי $A=\begin{pmatrix}3 & 9\\ -1 & -3\end{pmatrix}$. מצא את צורת ג'ורדן J של A ומצא מטריצה P כך ש-$P^{-1}AP=J$.

$A^2=0$

$k=2$

$\operatorname{Im} A \subseteq Ker A$

$rank A = 1$

$\dim \operatorname{Im} A = 1$

$\dim Ker A = 1$

<u>פתרון:</u> היא נילפוטנטית מסדר 2, מקבלים בסוף

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 9\\ -1 & -3\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}_{=P}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

<u>תרגיל 4</u> כנ"ל עבור $A=\begin{pmatrix}6 & 2 & -2\\ -16 & -5 & 7\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$

<u>פתרון:</u>

$$A^2=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 5 & 0 & -10\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

לכן נילפוטנטית מסדר 3, לכן $\operatorname{Im} A^2 \subseteq KerA \cap \operatorname{Im} A \subseteq KerA$. ה-rank של A^2 הוא 1. ו-KerA=2. לכן מספיק למצוא בסיס ל-$\operatorname{Im} A^2$ ולהשלים לבסיס של $KerA$. סה"כ מקבלים:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & -3 & -16\\ 0 & -1 & -5\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 2 & -2\\ -16 & -5 & 7\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 6 & 1\\ 5 & -16 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} A^2 \subseteq Ker A$

$A^2 v$

$A v$

v

<u>תרגיל 5</u> כנ"ל עבור $A=\begin{pmatrix}10 & 1 & -1\\ 2 & 9 & -1\\ 6 & 3 & 5\end{pmatrix}$

פתרון: פ"א $(x-8)^3$, מחסרים 8, מקבלים נילפוטנטית ופותרים כמו הקודמות. מקבלים בסוף:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & -1/4 & 1/4\\ 1 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 3/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 1 & -1\\ 2 & 9 & -1\\ 6 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 1 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}.$$

$B = A - 8I$

פתרון 6:

דוגמא תהי $A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\3&-5&4\\6&-14&10\end{pmatrix}$. מצא את צורת ג'ורדן J של A ומטריצה הפיכה P כך ש-
$P^{-1}AP=J$.

(2)

פתרון

ראשית נמצא את הפולינום האופייני:

$$\det\begin{pmatrix}x-2&-2&1\\-3&x+5&-4\\-6&14&x-10\end{pmatrix}=(x-2)(x+5)(x-10)-48-42+6(x+5)+56(x-2)-6(x-10)$$
$$=x^3-7x^2+16x-12$$

נחשב שורשים רציונליים: מועמדים אפשריים הם המחלקים של 12, כלומר $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$.
נציב אותם ונראה כי 2 מאפס את הפולינום, לכן נבצע חילוק פולינומים:

$\frac{x^3-7x^2+16x-12}{x-2}=x^2-5x+6$ ו- $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ לכן סה"כ:
$f_A(x)=(x-2)^2(x-3)$. $\to$ (3)

תזכורת: עבור אופרטור T, המרחב העצמי המוכלל K_λ: (הכל בהנחה שהפ"א מל"ל)

1. הגדרה: $K_\lambda=Ker\,(T-\lambda I)^n$ (באשר $n=\dim V$).
2. יהי λ ע"ע של T ונסמן ב- T_0 את הצמצום של T ל- K_λ. אזי $f_{T_0}=(x-\lambda)^m$ באשר $m=\dim K_\lambda$.
3. $\dim K_\lambda$ הוא הר"א של הע"ע λ
4. אם ל- T ע"ע $\lambda_1,..,\lambda_t$ אז $V=K_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus K_{\lambda_t}$.
5. מסקנה: משפט ג'ורדן

(1)

כעת בחזרה לפתרון התרגיל: לפי תכונה 4 לעיל נקבל כי $\mathbb{R}^3=K_2\oplus K_3$.
הר"א של הע"ע 3 הוא 1 לכן (לפי תכונה 3 לעיל) בסיס ל- K_3 יהיה פשוט וקטור עצמי של A: נחפש פתרון ל- $(A-3I)v=0$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix}-1&2&-1&0\\3&-8&4&0\\6&-14&7&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&2&-1&0\\0&-2&1&0\\0&-2&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&2&-1&0\\0&-2&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(4)

כלומר $2y=z$ (מהשורה האמצעית) ולכן $x=0$ (מהשורה הראשונה) לכן כל הו"ע הם מהצורה $(0,t,2t)$ עבור $t\in\mathbb{R}$. נבחר למשל $\boxed{w=(0,1,2)}$.

הר"א של הע"ע 2 הוא 2 לכן (לפי תכונה 3 לעיל) $\dim K_2=2$.

$(A-2I)v$, $(A-2I)^2v$ ניקח $\leftarrow$

כזכור, בהוכחת משפט ג'ורדן, מגדירים אופרטור $T_0=(T-2I)|_{\lambda_2}$ (הצמצום של T למרחב העצמי המוכלל). ואז מסתכלים על $imT_0\subseteq KerT_0$. במקרה של הדוגמא שלנו $KerT_0=imT_0$.

(5)

Av

$v: Av=0$

$v: (A-2I)^2v=0$

$\cancel{A}^2 v=0$?

$(A-2I)v: (A-2I)(A-2I)v=0$

בתרגום ללשון מטריצות, זה אומר שמסתכלים על החיתוך של imT עם K_2 כלומר מחפשים וקטורים v,u כך ש-
$$\begin{matrix}(A-2I)^2u=0\\ v=(A-2I)u\end{matrix} \quad *$$

ראשית נחשב את $Null\,(A-2I)^2$.

$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&-1&1\\6&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\3&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ לכן הוקטורים ב-$Null$ הם מהצורה (x,y,z) באשר $3x-y+z=0$. (2 דרגות חופש). נבחר למשל $x=0, y=1$ ונקבל $z=1$ כלומר הוקטור $\boxed{u=(0,1,1)}$. כעת נמצא את v: $v=(A-2I)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ כלומר $\boxed{v=\begin{pmatrix}1\\-3\\-6\end{pmatrix}}$.

6

נשים את הוקטורים שמצאנו במטריצה:
$P=\begin{pmatrix}v, & u, & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&1\\-6&1&2\end{pmatrix}$.

נחשב את ההפכית: $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\3&-1&1\end{pmatrix}$.

נחשב: $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-1\\3&-5&4\\6&-14&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&1\\-6&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ ומצאנו את צורת ג'ורדן.

7

$$A\,(v,u,w)=(Av,Au,Aw)=(\lambda_1 v,\lambda_2 u,\lambda_3 w)= \circledast$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}(v,u,w)= \;\; \Rightarrow$$

$$(v,u,w)^{-1}A\,(v,u,w)=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$$