תירגול 7

2 בדצמבר 2013

בסיס ומימד

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. קבוצה $B \subset V$ בת"ל שפורשת את המרחב ($span(B) = V$) נקראת בסיס.
הגדרה: המימד של V הוא $dim_{\mathbb{F}}V = |B|$ כאשר B בסיס. V יקרא נוצר סופית אם $dim_{\mathbb{F}}V < \infty$
משפט: ההגדרה של מימד מוגדרת היטב כלומר לכל שתי בסיסים B, B' הגדלים שלהם שווים. $|B| = |B'|$.
דוגמאות לבסיסים סטנדרטים:

1. $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. בסיס $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$
2. $V = \mathbb{C}^{3\times 2}$ מעל שדה $\mathbb{C}$בסיס
$$B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$
3. $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים מדרגה 2 מעל $\mathbb{R}$. בסיס $B = \{1, x, x^2\}$
4. מרחב הפולינומים $\mathbb{F}[x]$ בסיס $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4 \dots\}$ בסיס אינסופי.

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \dots v_n\}$ קבוצה בת"ל
נניח שקיים $v \in V \backslash span(S)$. הוכח: $S' = \{v_1, \dots v_n, v\}$ בת"ל.
הוכחה: נניח $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n + \alpha v = 0$
$\Leftarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n = -\alpha v$
$\Leftarrow \alpha = 0$ כי אחרת נקבל ש $v \in span(S)$ ע"י חילוק ב $-\alpha$.
$\Leftarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n = 0 \Leftarrow \alpha_i = 0$ כי S בת"ל.
תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \dots v_n\}$. נניח v_n תלוי לינארית בוקטורים האחרים.
אזי $span(S) = spab(S')$ כאשר $S' = \{v_1, \dots v_{n-1}\}$ (בתרגיל בית)
משפט: יהיה $B \subset V$ אזי התנאים הבאים שקולים:

1. Bבסיס
2. B קבוצה בת"ל מקסימאלית

3. B קבוצה פורשת את V- מינימאלית.

דוגמא: $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. ראינו כי $span(\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\})=\mathbb{R}^2$. נבדוק כי בת"ל $\left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\1&3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\end{array}\right)$ ולכן הוקטורים בת"ל. מסקנה $\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\}$ בסיס ל V.

תרגיל: יהיה $V=\mathbb{C}^2$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. מצא $dim_{\mathbb{F}}V$.

1. כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{C}$

פתרון: קל לראות כי $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ קבוצה פורשת ובת"ל ולכן בסיס. $dim_{\mathbb{F}}V=2$

2. כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$

פתרון: במקרה זה צריך יותר וקטורים לבסיס כי יש פחות סקלארים להשתמש בהם.

טענה: $B=\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\}$ בסיס.

הוכחה: B פורשת: יהיה $\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix}\in V$ אזי

$\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$.

B בת"ל. נניח $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftarrow\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 i\\\alpha_3+\alpha_4 i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftarrow\alpha_i=0$.

משפט השלישי חינם

יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ממימד n $(dim_{\mathbb{F}}V=n)$. תהא קבוצה $B\subset V$ אם Bמקיימת 2 מתוך 3 התנאים הבאים אזי היא מקיימת גם את השלישי (במקרה זה Bתהיה בסיס).

1. $\#B=n$
2. B פורשת את V
3. B בת"ל

תרגיל: $V=\mathbb{R}^{2\times2}$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. השלם את $S=\{v_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\}$ לבסיס.

פתרון: $dim_{\mathbb{F}}V=4$ ראינו כי S בת"ל ולכן מספיק למצוא וקטור $v\notin span(S)$ ואז $S\cup\{v\}$ קבוצה בת"ל (לפי אחד התרגילים שעשינו) מגודל 4 ולכן בסיס.

ראינו שיעור קודם כי $span(S)=\{\begin{pmatrix}b+2c&b\\c&d\end{pmatrix}\}$ ולכן $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\notin span(S)$.

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $W\subset V$ תת מרחב מאותו מימד סופי

$(dim_{\mathbb{F}}V = dim_{\mathbb{F}}W = n)$. הוכח: $W = V$.
הוכחה: נבחר $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ בסיס ל W. בפרט $span(B) = W$
ו Bקבוצה בת"ל. כיוון ש Bעם n איברים אזי לפי השלישי חינם $span(B) = V$.■

תרגיל: $V = \mathbb{C}_1[x]$ מעל $\mathbb{C}$. $B = \{1+x, 1+ix, i+x\}$ מצא $B^{'} \subset B$ כך ש $B^{'}$בסיס ל V.

פתרון: $dim_{\mathbb{F}}V = 2$ מספיק למצוא 2 וקטורים ב B שהם בת"ל. נבדוק באופן כללי האם הווקטורים בת"ל.

ש"ל האם למערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 0 \\ 1 & i & 1 & 0 \end{array}\right)$יש פתרון לא טרויאלי:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 0 \\ 1 & i & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 0 \\ 0 & i-1 & 1-i & 0 \end{array}\right)$, כלמור הוקטורים ת"ל אבל אם היינו מתחילים עם $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right)$ היינו מגיעים ל$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 \end{array}\right)$ כלומר $B^{'} = \{1+x, 1+ix\}$ קבוצה בת"ל ולכן בסיס.

דוגמא: $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $B = \{\begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix}\}$ בסיס. למה? לפי השלישי חינם מספיק למצוא 2 וקטורים בת"ל.

טענה אם $\{v_1, v_2\}$מקיימים $v_i \neq 0$ ו $v_1 \neq \alpha v_2$ (כלומר v_1 אינו פרופורציונאלי ל v_2) הם בת"ל.

הערות כלליות:

1. לכל קבוצה $B \subset V$ שפורשת את Vניתן למצוא $B^{'} \subset B$ כך ש $B^{'}$ בסיס (לצמצם את B לבסיס)
2. לכל קבוצה $B \subset V$ בת"ל ניתן למצוא $B \subset B^{'}$ כך ש $B^{'}$ בסיס (להרחיב את Bלבסיס)

תרגיל: היה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $B = \{v_1, \ldots v_n\}$ בסיס.
אזי כל וקטור $v \in V$. ניתן להצגה יחידה באיברי בסיס B.

פתרון: כיוון ש $span(B) = V$ ניתן לכתוב $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = v$ נניח כי ניתן להציג את v גם כ $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$אזי $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ כלומר $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$
כיוון ש B בת"ל לכל i $\alpha_i - \beta_i = 0$ כלומר לכל i $\alpha_i = \beta_i$ ■