מועד א' – מד"ר – 83-115 – 16/07/23

זמן המבחן: שלוש שעות. חומר עזר: נוסחאון מצורף, מחשבון מותר משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות.

מרצים: דר' זהבה צבי, דר' ארז שיינר.

1. מצאו פתרון למד"ר $\frac{-3y'}{y} = xy^3 - 1$ המקיים $y(0) = 1$.

ראשית נכפול בy ונחלק ב-3

$$y' = -\frac{1}{3}xy^4 + \frac{1}{3}y$$

נעביר אגף על מנת לקבל מד"ר ברנולי

$$y' - \frac{1}{3}y = -\frac{1}{3}xy^4$$

נציב $z = y^{1-4} = y^{-3}$ ונקבל את המד"ר

$$z' + (-3)\left(-\frac{1}{3}\right)z = (-3)\left(-\frac{1}{3}\right)x$$

$$z' + z = x$$

זו מד"ר לינארית שפתרונה הוא

$$z = e^{-x}\left(C + \int xe^x dx\right) = Ce^{-x} + e^{-x}(xe^x - e^x) = \frac{C}{e^x} + x - 1$$

כיוון ש $z = \frac{1}{y^3}$ נקבל כי $y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$ כלומר

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{C}{e^x} + x - 1}}$$

לבסוף נציב את תנאי ההתחלה

$$1 = y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{C-1}}$$

ולכן

$$C - 1 = 1$$

ולכן $C = 2$ וסה"כ הפתרון הוא

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{e^x} + x - 1}}$$

2. מצאו פתרון למד"ר $2\sin(y)\, e^{2\cos(y)} y' = e^{2\cos(y)} - 1$ המקיים $y(0) = \pi$.

נבדוק האם מדובר במד"ר מדוייקת, ראשית נעבור לצורה הדיפרנציאלית של המד"ר:

$$\left(1 - e^{2\cos(y)}\right) dx + 2\sin(y)\, e^{2\cos(y)} dy = 0$$

נגזור את המקדם של dx לפי y ואת המקדם של dy לפי x אך נקבל

$$2\sin(y)\, e^{2\cos(y)} \neq 0$$

נבדוק האם יש גורם אינטגרציה

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2\sin(y)\, e^{2\cos(y)} - 0}{2\sin(y)\, e^{2\cos(y)}} = 1$$

זה ביטוי התלוי בx בלבד ולכן יש גורם אינטגרציה

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x$$

נכפול את המד"ר בגורם האינטגרציה ונקבל

$$\left(1 - e^{2\cos(y)}\right) e^x dx + 2\sin(y)\, e^{2\cos(y)} e^x dy = 0$$

כעת נוודא (לא חובה אבל מאד מומלץ) כי המד"ר אכן מדוייקת:

$$P_y = 2\sin(y)\,e^{2\cos(y)}e^x$$

$$Q_x = 2\sin(y)\,e^{2\cos(y)}e^x$$

אכן המד"ר מדוייקת כיוון ש $P_y = Q_x$

נחשב אינטגרל

$$F(x,y) = \int \left(1 - e^{2\cos(y)}\right)e^x dx = \left(1 - e^{2\cos(y)}\right)e^x + c(y)$$

$$F_y = 2\sin(y)\,e^{2\cos(y)}e^x + c'(y) = 2\sin(y)\,e^{2\cos(y)}e^x$$

לכן $c'(y) = 0$ ולכן $c(y) = 0$ סה"כ

$$F(x,y) = \left(1 - e^{2\cos(y)}\right)e^x$$

והפתרון למד"ר נתון באופן סתום ע"י

$$\left(1 - e^{2\cos(y)}\right)e^x = C$$

נציב את תנאי ההתחלה $y(0) = \pi$

$$(1 - e^{-2})e^0 = C$$

ולכן

$$\left(1 - e^{2\cos(y)}\right)e^x = 1 - e^{-2}$$

לבסוף נחלץ את הפונקציה y

$$1 - e^{2\cos(y)} = e^{-x} - e^{-2-x}$$

$$e^{2\cos(y)} = 1 - e^{-x} + e^{-2-x}$$

$$2\cos(y) = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2-x})$$

$$\cos(y) = \frac{1}{2}\ln(1 - e^{-x} + e^{-2-x})$$

$$y = \arccos\left(\frac{1}{2}\ln(1 - e^{-x} + e^{-2-x})\right)$$

תודה רבה, שבת שלום.

3.

א. (15נק') מצאו את הפתרון הכללי למד"ר ההומוגנית $y'' - 3y' + 2y = 0$.

מדובר במד"ר לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים, או במילים אחרות – 15 נקודות מתנה.

נחשב את הפולינום האופייני

$$p(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

שורשיו הם $\lambda_{1,2} = 1,2$ ולכן הפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

ב. (7 נק') מצאו פתרון למד"ר $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x(x+2)}{x^3}$ המקיים $y(1) = 2e, y'(1) = e$.

רמז: חשבו את הנגזרת $(f(x)\cdot e^{-x})'$.

עבור 7 הנקודות הללו לעומת זאת, נעבוד כמו יעקב.

נותר לנו למצוא את הפתרון הפרטי, כיוון ששיטת הניחוש אינה מתאימה נשתמש בוריאצית פרמטרים

$$y_p = c_1(x)e^{x} + c_2(x)e^{2x}$$

כאשר

$$c_1'(x)=\frac{\det\begin{pmatrix}0 & e^{2x}\\ \frac{e^x(x+2)}{x^3} & 2e^x\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}e^x & e^{2x}\\ e^x & 2e^x\end{pmatrix}}=\frac{-e^{3x}\cdot\frac{x+2}{x^3}}{e^{3x}}=-\frac{x+2}{x^3}=-\frac{1}{x^2}-2x^{-3}$$

לכן

$$c_1(x)=\int\left(-\frac{1}{x^2}-2x^{-3}\right)dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

כעת

$$c_2'(x)=\frac{\det\begin{pmatrix}e^x & 0\\ e^x & \frac{e^x(x+2)}{x^3}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}e^x & e^{2x}\\ e^x & 2e^x\end{pmatrix}}=\frac{e^{2x}\cdot\frac{x+2}{x^3}}{e^{3x}}=e^{-x}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$$

כעת נעזר ברמז:

$$(f(x)e^{-x})'=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=e^{-x}\big(-f(x)+f'(x)\big)$$

עבור הפונקציה $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ נקבל כי

$$e^{-x}\big(-f(x)+f'(x)\big)=e^{-x}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$$

ולכן

$$c_2(x)=\int e^{-x}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)dx=-\frac{1}{x^2}e^{-x}$$

סה"כ הפתרון הפרטי הוא

$$y_p=c_1(x)e^x+c_2(x)e^{2x}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)e^x-\frac{1}{x^2}e^{-x}\cdot e^{2x}=\frac{e^x}{x}$$

אם כך הפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{e^x}{x}$$

נציב את תנאי ההתחלה $y(1) = 2e$

$$2e = c_1 e + c_2 e^2 + e$$

כעת נגזור

$$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + \frac{e^x x - e^x}{x^2}$$

נציב את תנאי ההתחלה $y'(1) = e$

$$e = c_1 e + 2c_2 e^2$$

נחסר בין המשוואת ונקבל כי

$$c_2 e^2 = 0$$

ולכן $c_2 = 0$

ומכאן

$$e = c_1 e$$

ולכן $c_1 = 1$

סה"כ בשעה טובה מצאנו את הפתרון

$$y = e^x + \frac{e^x}{x}$$

פשוט וקל.

4. כדור בעל מסה $m = 1$ נעזב במהירות אפס מגובה y_0 ומגיע לקרקע לאחר 2 שניות.

הכוחות הפועלים על הכדור הם כוח הכבידה וכוח התנגדות האוויר שגודלו חצי מגודל המהירות.

הניחו כי קבוע הכבידה של כדור הארץ הוא $g = 10$ מטר לשנייה בריבוע.

ראשית נחליט כי y_0 חיובי, וגובה פני הקרקע הוא אפס.

נסמן ב$y(t)$ את גובה הכדור ברגע t ולכן $v(t) = y'(t)$ היא המהירות וכן $a(t) = y''(t)$ היא התאוצה.

לפי החוק השני של ניוטון $F = ma$ נקבל כי

$$-mg - \frac{1}{2}v(t) = ma(t)$$

כיוון שהמסה שווה ל$m = 1$ נקבל כי

$$-10 - \frac{1}{2}v(t) = v'(t)$$

נסדר את המד"ר כלינארית מסדר ראשון

$$v'(t) + \frac{1}{2}v(t) = -10$$

ולכן הפתרון הוא

$$v(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C + \int -10e^{\frac{1}{2}t}dt\right) = e^{-\frac{1}{2}t}C + e^{-\frac{1}{2}t}\left(-20e^{\frac{1}{2}t}\right) = \frac{C}{e^{\frac{1}{2}t}} - 20$$

לבסוף נציב את תנאי ההתחלה, המהירות ברגע הראשון הייתה אפס ולכן

$$v(0) = \frac{C}{1} - 20 = 0$$

לכן $C = 20$

א. חשבו את מהירות הפגיעה בקרקע.

אם כך, מהירות הפגיעה בקרקע היא $v(2)$ (כיוון שלקח לכדור 2 שניות להגיע לקרקע) וקיבלנו

$$v(2)=\frac{20}{e}-20=20(e^{-1}-1)\approx -12.64\ m/sec$$

שימו לב כי המהירות שלילית, שכן הכדור נופל למטה, ואילו הגדרנו את הכיוון החיובי של הציר כלפי מעלה.

ב. חשבו את הגובה ההתחלתי y_0.

מתקיים כי

$$y(t)=\int v(t)dt=\int 20\left(e^{-\frac{1}{2}t}-1\right)dt=\frac{20}{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}t}-20t+D=-40e^{-\frac{1}{2}t}-20t+D$$

כעת נציב את התנאי $y(2)=0$, שכן זה רגע הפגיעה בקרקע ונקבל

$$-40e^{-1}-40+D=0$$

$$D=40\left(\frac{1}{e}+1\right)$$

לכן

$$y(t)=-40e^{-\frac{1}{2}t}-20t+40\left(\frac{1}{e}+1\right)$$

ומכאן הגובה ההתחלתי הוא

$$y_0=y(0)=-40-0+\frac{40}{e}+40=\frac{40}{e}\approx 14.71\ m$$

5. יהי פרמטר $a \in \mathbb{R}$ ונביט במד"ר $y'' - (a^2+1)y' + (a^3 - a^2 + a)y = 0$

ראשית נשים לב כי מדובר במד"ר לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים, ולכן נחשב את הפולינום האופייני

$$p(x) = x^2 - (a^2+1)x + a^3 - a^2 + a$$

כאשר נראה שתי דרכים על מנת לפרק את הפרבולה הזו:

דרך 1:

$$p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 - (\lambda_1+\lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$$

לכן

$$\lambda_1\lambda_2 = a^3 - a^2 + a = a(a^2 - a + 1)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a^2 + 1$$

קל מאד לראות כי

$$\lambda_1 = a$$

$$\lambda_2 = a^2 - a + 1$$

מקיימים את שתי המשוואות.

דרך 2:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a^2+1 \pm \sqrt{(a^2+1)^2 - 4(a^3-a^2+a)}}{2} = \frac{a^2+1 \pm \sqrt{a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1}}{2} = \frac{a^2+1 \pm \sqrt{(a-1)^4}}{2} =$$

$$= \frac{a^2+1 \pm (a-1)^2}{2} = \frac{a^2+1 \pm (a^2-2a+1)}{2} = \begin{cases} \dfrac{a^2+1+a^2-2a+1}{2} = a^2 - a + 1 \\ \dfrac{a^2+1-(a^2-2a+1)}{2} = a \end{cases}$$

כך או כך קיבלנו סה"כ כי הפולינום האופייני הוא

$$p(x) = (x-a)\big(x-(a^2-a+1)\big)$$

ישנם שני שורשים ממשיים לפולינום האופייני, והשאלה הראשונה היא מתי הם שווים ומתי הם שונים.

$$a = a^2 - a + 1$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$(a-1)^2 = 0$$

כלומר הם שווים אם ורק אם $a = 1$.

במקרה זה, הפתרון הכללי למד"ר הוא מהצורה

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

לכל $a \neq 1$ הפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{(a^2-a+1)x}$$

א. עבור אילו ערכי a קיים פתרון $y(x)$ למד"ר המקיים כי $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \infty$?

אם $a = 1$ נקבל כי

$$\lim_{x\to-\infty} c_1 e^x + c_2 x e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{c_1 + c_2 x}{e^{-x}} = \left\{\frac{-\infty}{\infty}, L'Hopital\right\} = \lim_{x\to-\infty} \frac{c_2}{e^{-x}} = \left\{\frac{c_2}{\infty}\right\} = 0$$

אחרת, קל לוודא כי הפרבולה $a^2 - a + 1$ מחייכת ומרחפת, ולכן $\lambda_2 = a^2 - a + 1 > 0$ לכל a

לכן

$$\lim_{x\to-\infty} c_2 e^{\lambda_2 x} = 0$$

אם $\lambda_1 = a > 0$ וכן $\lambda_1 \neq 1$ נקבל כי גם

$$\lim_{x\to-\infty} c_1 e^{\lambda_1 x} = 0$$

ולכן $a \leq 0$

עבור $a = 0$ נקבל כי

$$\lim_{x\to-\infty} c_1 e^{0\cdot x} = c_1 \neq \infty$$

ולכן $a < 0$.

כעת, לכל $a < 0$ אם נבחר $c_1 > 0, c_2 = 0$ נקבל פתרון

$$\lim_{x\to-\infty} c_1 e^{ax} = \infty$$

כדרוש.

ב. עבור אילו ערכי a, אם בכלל, קיים פתרון למד"ר מהצורה $y(x) = xe^{\beta x}$ כאשר $\beta \in \mathbb{R}$?

ראינו שלכל $a \neq 1$ הפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

והוא בלתי תלוי ב $xe^{\beta x}$ לכל קבוע β.

לעומת זאת, עבור $a = 1$ אם נבחר $c_1 = 0, c_2 = 1$ נקבל את הפתרון

$$y = xe^{x}$$

התואם את דרישות השאלה עבור בחירת $\beta = 1$.

<u>נוסחאון מד"ר</u>

<u>חלק א' – מד"ר מסדר ראשון:</u>

<u>כתיב דיפרנציאלי</u> – את המד"ר $y' = f(x,y)$ נוכל לכתוב באופן שקול $dy = f(x,y)dx$

<u>מד"ר פרידה</u> – פתרון למד"ר מהצורה $f(x)dx = g(y)dy$ מקיים את המשוואה הסתומה $F(x) = G(y) + C$

כאשר $F(x) = \int f(x)dx$ וכן $G(y) = \int g(y)dy$.

<u>מד"ר הומוגנית</u> – מד"ר מהצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$. נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל $\int \frac{1}{g(z)-z}dz = \ln|x| + C$. נמצא את z ונציב לקבל $y = xz$.

ניתן להציג את $f(x,y)$ כ$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ אם ורק אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים כי $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$.

במקרה זה $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

<u>מד"ר לינארית מסדר ראשון</u> – פתרון למד"ר $y' + a(x)y = b(x)$ נתון ע"י הנוסחא

$$y = e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}dx\right)$$

כאשר $A(x) = \int a(x)dx$.

<u>משוואת ברנולי</u> – יהי $n \neq 0,1$, מד"ר מהצורה $y' + a(x)y = b(x)y^n$.

נציב $z = y^{1-n}$ ונקבל את המד"ר $z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$.

נמצא את z ונחלץ $y = z^{\left(\frac{1}{1-n}\right)}$.

<u>מד"ר מדוייקת</u> – מד"ר מהצורה $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

הפתרון של מד"ר מדוייקת מקיים את המשוואה הסתומה $F(x,y) = C$ כאשר $F_x = P, F_y = Q$.

שלבי הפתרון:

1. נבדוק אם היא מדוייקת – המד"ר מדוייקת אם ורק אם $P_y = Q_x$.
2. נמצא את F ע"י חישוב אינטגרל $F = \int Pdx + c(y)$.
3. נגזור ונשווה למקדם השני $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx + c(y)\right) = Q$, וכך נמצא את $c(y)$.
4. הפתרון נתון באופן סתום ע"י $F(x,y) = C$.

<u>גורם אינטגרציה</u> – מד"ר מהצורה $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, נחפש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ שכפל בו יהפוך את המד"ר למדוייקת.

שלבי התהליך:

1. יש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ אם הביטוי $\frac{P_y-Q_x}{Q}$ אינו תלוי בy.
2. במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(x)=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}dx}$.
3. נכפול בגורם האינטגרציה, ונוודא שקיבלנו מד"ר מדוייקת (לא חובה מתמטית, אבל מומלץ מאד).
4. נפתור את המד"ר המדוייקת שקיבלנו.

<u>בעיית קושי למד"ר מסדר ראשון</u> – מציאת פונקציה y המקיימת את המד"ר $y'=f(x,y)$ וכן את תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$.

<u>המשוואה האינטגרלית</u> – בעיית הקושי שקולה למשוואה האינטגרלית $y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f\big(t,y(t)\big)dt$.

<u>משפט הקיום והיחידות</u> – תהי $f(x,y)$ רציפה ובעלת נגזרת חלקית f_y רציפה בתחום $|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b$.
נסמן בM את החסם של $|f(x,y)|$ בתחום, ונסמן $a'=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$.

אזי **קיים** פתרון **יחיד** y לבעיית הקושי $y'=f(x,y)$ עם תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$ בתחום $|x-x_0|\le a'$.

<u>חלק ב' – נוסחאות פיזיקליות בסיסיות:</u>

<u>משמעות הנגזרות</u> –

1. $y(t)$ מיקום
2. $v(t)=y'(t)$ מהירות
3. $a(t)=y''(t)$ תאוצה

<u>החוק השני של ניוטון</u> - $F=ma$ כאשר F הוא סכום הכוחות, m היא המסה של הגוף, וכן a הוא התאוצה של הגוף

<u>כוח המשיכה של כדור הארץ</u> – עבור גוף "קרוב" לפני כדור הארץ נניח כי כוח המשיכה הוא mg כאשר m היא המסה של הגוף וכן g הוא קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ ($g\approx 9.82\ m/sec^2$).

<u>כוח קפיץ</u> – קפיץ בעל קבוע קפיץ k מפעיל כוח פרופורציונלי למרחק מנקודת הרפיון בכיוון ההפוך.

אם y הוא המיקום ביחס לנקודת הרפיון, אז הקפיץ יפעיל כוח של $-ky$.

<u>חלק ג' – מד"ר מסדר גבוה:</u>

<u>הורדת סדר למד"ר מסדר שני ללא המשתנה</u> – עבור מד"ר מהצורה $y'' = f(y, y')$

1. נחפש פונקציה $p(y)$ עבורה $p'p = f(p, y)$.
2. נחפש פונקציה y המקיימת $y' = p(y)$.

<u>מד"ר לינארית</u> – מד"ר מהצורה $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ נקראת מד"ר לינארית מסדר n.
אם $b(x) = 0$ המד"ר נקראת הומוגנית.

<u>בעיית קושי למד"ר לינארית</u> – מציאת פונקציה המקיימת את המד"ר הלינארית מסדר n ואת תנאי ההתחלה

$$y(x_0) = b_0, y'(x_0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$$

<u>משפט קיום ויחידות</u> – אם המקדמים $a_i(x), b(x)$ רציפים בקטע I אזי קיים פתרון יחיד בקטע I המקיים את בעיית הקושי.

<u>מרחב הפתרונות</u> –מרחב הפתרונות למד"ר הלינארית ההומוגנית מסדר n עם מקדמים רציפים הוא ממימד n.

<u>פתרון כללי למד"ר לינארית</u> – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים, יהיו $y_1, \dots, y_n$ בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית ויהי y_p פתרון פרטי למד"ר האי הומוגנית. אזי הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y = y_p + c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$$

<u>הורונסקיאן</u> – עבור הפוקנציות $y_1, \dots, y_n$ נגדיר את הורונסקיאן

$$W = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1{}' & y_2{}' & \cdots & y_n{}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

<u>תלות לינארית של פתרונות</u> – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים בקטע I, ויהיו $y_1, \dots, y_n$ פתרונות למד"ר.

אזי הפתרונות ת"ל אם ורק אם הורונסקיאן מתאפס בכל הקטע I.

<u>מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים</u> – הפולינום האופייני של המד"ר $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0 = b(x)$ הוא

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

אם $\lambda \in \mathbb{R}$ שורש ממשי של הפולינום האופייני מריבוי k, אזי הוא תורם את הפתרונות

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$$

למד"ר ההומוגנית.

אם $\lambda = a \pm bi \in \mathbb{C}$ זוג שורשים מרוכבים של הפולינום האופייני מריבוי k כל אחד, אזי הם תורמים את הפתרונות

$$e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\sin(bx), xe^{ax}\cos(bx), xe^{ax}\sin(bx), \dots, x^{k-1}e^{ax}\cos(bx), x^{k-1}e^{ax}\sin(bx)$$

למד"ר ההומוגנית.

<u>שיטת הניחוש עבור מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים</u> – עבור המד"ר

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)e^{ax}$$

כאשר a שורש של הפולינום האופייני מריבוי k ננחש פתרון פרטי

$$y_p=x^k(d_0+d_1x+\cdots+d_mx^m)e^{ax}$$

עבור המד"ר

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)e^{ax}\cos{(bx)}$$

או המד"ר

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)e^{ax}\sin{(bx)}$$

כאשר $a\pm bi$ שורשים של הפולינום האופייני מריבוי k כל אחד ננחש פתרון פרטי:

$$y_p=x^k(d_0+d_1x+\cdots+d_mx^m)e^{ax}\cos(bx)+x^k(t_0+t_1x+\cdots+t_mx^m)e^{ax}\sin{(bx)}$$

<u>שיטת וריאצית המקדמים בעזרת כלל קרמר למציאת פתרון פרטי</u> – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים בקטע I:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=b(x)$$

ויהיו $y_1,\dots,y_n$ פתרונות המהווים בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית. אזי הפונקציה

$$y_p=c_1(x)y_1(x)+\cdots+c_n(x)y_n(x)$$

מהווה פתרון פרטי למד"ר אם לכל i מתקיים כי

$$c_i'(x)=\frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

כאשר

$$A=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1{}' & y_2{}' & \cdots & y_n{}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

וכן A_i היא המטריצה המתקבלת מA ע"י החלפת העמודה הi בעמודה $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ b(x)\end{pmatrix}$

<u>טורי טיילור</u> –

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\qquad a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\qquad \sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad \cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}$$

<u>מערכת מד"ר</u> – עבור מערכת מד"ר מהצורה $\vec{y}^{(n)} = A\vec{y}$, כאשר v_1 ו"ע עם ע"ע מתאים λ_1 של המטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ננחש פתרון $\vec{y} = f \cdot v_1$, ונקבל כי הוא אכן פתרון אם $f^{(n)} = \lambda_1 f$.

<u>משוואת אוילר</u> – משוואת אוילר הומוגנית היא משוואה לינארית מהצורה

$$a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

על מנת למצוא את הפתרונות של משוואת אוילר הומוגנית נבצע את השלבים הבאים:

1. נציב $y = x^r$ במשוואה, נצמצם את x^r ונקבל את המשוואה האינדנציאלית.
2. אם $r \in \mathbb{R}$ שורש מריבוי k של המשוואה האינדנציאלית, נקבל את הפתרונות $x^r, \ln(x)\, x^r, \dots, (\ln(x))^{k-1} x^r$
3. אם $a \pm bi \in \mathbb{C}$ שורשים מריבוי k כל אחד של המשוואה האינדנציאלית נקבל את הפתרונות $x^a \cos(b \ln(x)), x^a \sin(b\, ln(x)), \ln(x)\, x^a \cos(b\, ln(x)), \ln(x)\, x^a \sin(b\, ln(x)), \dots$
$\dots, (\ln(x))^{k-1} x^a \cos(b\, ln(x)), (\ln(x))^{k-1} x^a \sin(b \ln(x))$

<u>חלק ד' – התמרת לפלס והדלתא של דירק:</u>

<u>התמרת לפלס</u> - $\mathcal{L}(y) = \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt$

<u>התמרות לפלס ידועות</u> –

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s - a}$$

$$\mathcal{L}\big(\delta(t - a)\big) = e^{-sa}$$

תכונות התמרת לפלס –

יחידות –

אם y_1, y_2 רציפות וכן $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2)$ אזי $y_1 = y_2$.

לינאריות –

$$\mathcal{L}(y_1 + ay_2) = \mathcal{L}(y_1) + a\mathcal{L}(y_2)$$

התמרת הנגזרת הראשונה –

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0)$$

התמרת הנגזרת –

$$\mathcal{L}\left(y^{(n)}\right) = s^n\mathcal{L}(y) - s^{n-1}y(0) - \cdots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

נגזרת ההתמרה –

$$\mathcal{L}(ty) = -F'(s)$$

הזזה של המשתנה s- אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$F(s-a) = \mathcal{L}\left(e^{at}y(t)\right)$$

הזזה של המשתנה t- אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$e^{-as}F(s) = \mathcal{L}\left(u(t-a)y(t-a)\right)$$

כאשר $u(t)$ היא פונקצית המדרגה:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$