קשירות(המשך)

הגדרה

X מרחב נורמי. $p,q\in X$. $\overline{pq}=\left\{x(t)\middle|\begin{array}{c}x(t)=(1-t)p+tq\\0\le t\le 1\end{array}\right\}$ הקטע המחבר את p ל-q.

זו גם מסילה מ-p ל-q, $x(0)=p$, $x(1)=q$.

חיבור מסילות(או הרכבת מסילות)

X מ"מ כלשהו.

אם γ_1 מסילה(הטווח של פונקציה רציפה על $[0,1]$) מ-p ל-q, γ_2 מסילה מ-q ל-r

$$\gamma:[0,1]\to X$$

$$\gamma(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t) & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \gamma_2\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

γ רציפה:

$$t=\frac{1}{2},\gamma_1(1)=q=\gamma_2(0)$$

הטווח של γ נקרא הרכבת המסילות γ_1 ו-γ_2 - $\gamma=\gamma_1\gamma_2$ או $\gamma_1+\gamma_2$(סכום)

במיוחד, אם X מרחב נורמי, אפשר "לחבר" כנ"ל קטעים(באינדוקציה - חיבור מספר סופי של קטעים). מסילה כזאת נקראת <u>קו פוליגונלי</u>, הוא חיבור של קטעים $\overline{p_iq_i}$ $(i=1,...n)$, $q_i=p_{i+1}\forall 1\le i\le n-1$

הגדרה

קבוצה E במרחב נורמי X נקראת <u>קשירה פוליגונלית</u> אם כל שתי נקודות ב-E ניתנות לחיבור ע"י קו פוליגונלי γ המוכל ב-E.

ראינו ש

קשירות פוליגונלית $\Leftarrow$ קשירות מסילתית. (בכל מרחב נורמי)

קשירות מסילתי $\Leftarrow$(קשירות בכל מרחב מטרי)

משפט

במרחב נורמי X, כל קבוצה <u>קשירה ופתוחה</u> E היא <u>קשירה פוליגונלית</u>.

(ז"א: עבור קבוצות <u>פתוחות</u> במ"נ, כל מושגי הקשירות שקולים).

הוכחה

תהי E קב' פתוחה וקשירה במ"נ X. צל"ה E קשירה פוליגונלית.

אפשר להניח ש$E \neq \emptyset$. תהי $p \in E$(כלשהי). נגדיר $A \doteqdot \left\{ q \in E \middle| \exists \begin{matrix} polygonal\, path \\ from\, p\, to\, q \end{matrix} \right\}$

א) A פתוחה: תהי $q \in A$, צל"ה שקיים כדור $B(q,r)$ המוכל בA. $q \in E$, וE פתוחה.
לכן קיים כדור $B(q,r) \subseteq E$.
יהי $z \in B(q,r)$. הקטע $\overline{zq} \subseteq B(q,r)$:

$$0 \le t \le 1, \| [(1-t)q + tz] - q \| = \| t(z-q) \| = t\|z-q\|$$

כיוון ש$q \in A$, קיים קו פוליג' γ_1 מp לq המוכל בE. $\gamma = \gamma_1 + \overline{qz}$ קו פוליגונלי מp לz המוכל בE. ז"א $z \in A$.
הוכחנו: $B(q,r) \subseteq A$.
נגדיר: $B = E \setminus A$

טענה: גם B פתוחה.
תהי $q \in B$. צל"ה קיים כדור $B(q,r)$ המוכל בB.
$q \in E$, E פתוחה, ולכן קיים $B(q,r) \subseteq E$. נניח $B(q,r) \nsubseteq B$, ז"א קיים $z \begin{matrix} \in B(q,r) \\ \in E \end{matrix}$ כך ש$z \notin B$. ז"א $z \in A$, כלומר קיימת מסילה פוליגונלית γ_1 מp לz המוכלת בE. $\gamma + \overline{zq} \subseteq E$ מסילה פוליגונלית מp לq. ז"א $q \in A$ - סתירה לנתון ש$q \in B$. הוכחנו: $B(q,r) \subseteq B$

$E = A \cup B$, A, B זרות, פתוחות, $A \neq 0$ כי $p \in A$(השייכת לE). כיוון שE קשירה, בהכרח $B = \emptyset$(כי אם $B \neq \emptyset$, אזי $E \cap B \neq \emptyset$, כי הוא מכיל נקודה כלשהי של B), אזי E תהיה לא קשירה!
ז"א $E = A$, דהיינו: כל נקודה $q \in E$ ניתנת לחיבור לנק' p ע"י קו פוליגונלי המוכל בE.

הגדרה

תחום במ"נ הוא קבוצה פתוחה וקשירה.

משפט ערך הביניים

יהי X מרחב מטרי כלשהו, ותהי E קבוצה קשירה בX, ותהי $f : E \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי:
לכל $\alpha, \beta \in f(X)$, $[\alpha, \beta] \subseteq f(X)$(או $[\beta, \alpha]$)

הוכחה

כיוון שE קשירה וf רציפה על E. $f(E)$ קבוצה קשירה ב$\mathbb{R}$(לפי משפט קודם). לפי משפט על קבוצות קשירות ב$\mathbb{R}$,

$$\alpha, \beta \in f(E) \Rightarrow [\alpha, \beta] \subseteq f(E)$$

מש"ל

גזירות

תהי f פונקציה ממשית המוגדרת בסביבה $B\left(x,r\right)$ של x ב-$\mathbb{R}^k$.
וקטור יחידה u ב-$\mathbb{R}^k$ הוא איבר של $\mathbb{R}^k$ שעבורו $\|u\|=1$ (מגדיר כיוון)

לדוגמה: $e^j=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$, $j=1,...k$. $e_i^j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

הדלתה של קרונקה:

$$\|e^j\|_p=\left(\sum_{i=1}^k\left|e_i^j\right|^p\right)^{1/p}=1$$

אלה וקטורי היחידה בכיוון הצירים.

הם מהווים בסיס למרחב - $x=\sum_{j=1}^k x_je^j$

$\{tu|0\le t<\infty\}$ הציר בכיוון u מהראשית. $\{x+tu|t\in\mathbb{R}\}$ הישר דרך x בכוון u (x נתון)

x,u נתונים: $F\left(t\right)\doteqdot f\left(x+tu\right)$ פונקציה של משתנה t ממשי, עם ערכים ממשיים, מוגדרת עבור $|t|<r$ כי

$$\|\left(x+tu\right)-x\|=\|tu\|=|t|\,\|u\|=|t|<r$$

$$x+tu\in B\left(x,r\right)$$

הגדרה (בסימונים לעיל)

אם F גזירה (לפי המשתנה t) בנקודה $t=0$, נאמר שהנגזרת הכיוונית בכוון u של f קיימת בנק' x וערכה הוא $F'\left(0\right)$. הסימון: $D_uf\left(x\right)=\frac{\partial f}{\partial u}\left(x\right)=\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{...}$

במיוחד:

$$D_{e^i}f\left(x\right)=\frac{\partial f}{\partial e^i}\left(x\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x\right)=$ הסימון המקובל

$$F\left(t\right)=f\left(x+te^i\right)=f\left(x_1,...,x_i+t,...x_k\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x\right)=\lim_{t\to0}\frac{f\left(x_1,...x_1+t,...x_k\right)-f\left(x_1,...x_k\right)}{t}$$

הנגזרת הרגילה לפי המשתנה x_i במקום x_i כאשר כל המשתנים האחרים (עבור $j\neq i$) מוחזקים קבועים