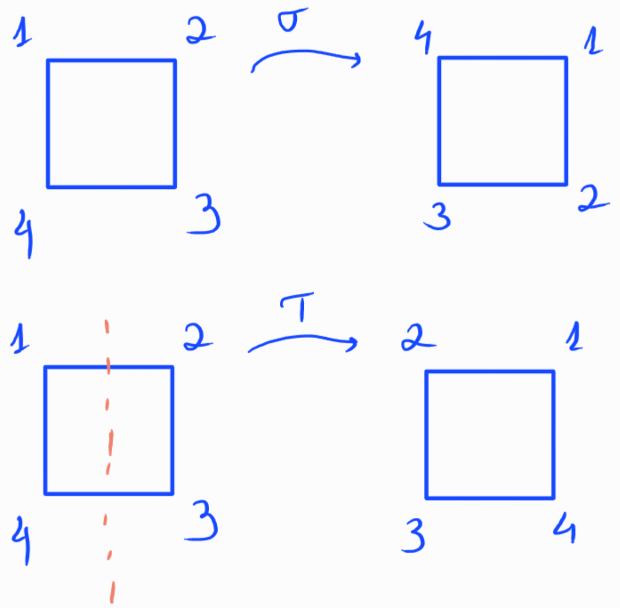
החבורה הדיהדרלית

D_n = סימטריות של מצולע משוכלל עם n צלעות.

σ = סיבוב ב- $\frac{2\pi}{n}$

τ = שיקוף ביחס לאיזשהו ציר סימטריה

D_4



D_n נוצרת ע"י σ ו- τ

$$D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = id,\ \tau^2 = id,\ \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$$

מקבלים שכל איבר ב- D_n הוא מהצורה σ^i או $\tau\sigma^i$ עבור $0 \le i < n$

$$|D_n| = 2n$$

בוחן א' - שאלה 3א

D_5 פועלת על עצמה ע"י הצמדה. מי המסלולים?

$$g * x = g x g^{-1}$$

$$orb(x) = conj(x) = \{y \in D_5 \mid \exists g \in D_5 : y = g x g^{-1}\} =$$
$$= \{g x g^{-1} \mid g \in D_5\}$$

$|conj(x)| \in \{1, 2, 5, \cancel{10}\} \Leftarrow |conj(x)| \,\big|\, |D_5| = 10, \quad \sum_{\text{מסלולים}} |conj(x)| = |D_5| = 10$

$x=e \iff x\in Z(D_5)=\{id\} \iff |conj(x)|=1$

הגדלים של מחלקות הצמידות צריכים להיות $1,2,2,5$.

מי במחלקת הצמידות של σ?

$\sigma^i \sigma \sigma^{-i} = \sigma$

$(\tau\sigma^i)\sigma(\tau\sigma^i)^{-1} = \tau\sigma^i\sigma\sigma^{-i}\tau = \tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$

לכן $conj(\sigma)=\{\sigma,\underset{\sigma^4}{\sigma^{-1}}\}$

בדומה: $conj(\sigma^2)=\{\sigma^2,\sigma^3\}$

$\sigma^i\sigma^2\sigma^{-i}=\sigma^2$

$(\tau\sigma^i)\sigma^2(\tau\sigma^i)^{-1} = \tau\sigma^2\tau = \tau\sigma\tau\tau\sigma\tau = \sigma^{-2}=\sigma^3$

לכן $conj(\sigma)=\{\sigma^2,\sigma^3\}$.

מחישוב הגדלים, $conj(\tau)=\{\tau,\tau\sigma,\tau\sigma^2,\tau\sigma^3,\tau\sigma^4\}$, $\underset{''}{} conj(\tau\sigma)$

בסך הכל מחלקות הצמידות $\{id\}, \{\sigma,\sigma^4\}, \{\sigma^2,\sigma^3\}, \{\tau\sigma^i \mid 0\le i\le 4\}$

נציגים: $id \quad \sigma \quad \sigma^2 \quad \tau$

מבחן 2021, שאלה 3א (3ב' לא בחומר)

G חבורה מסדר n, H חבורה מסדר m.

צ"ל: $G\times H$ פועלת באופן נאמן על קבוצה בגודל $n+m$.

G פועלת על עצמה ע"י כפל משמאל, הפעולה נאמנה $|G|=n$

H פועלת על עצמה ע"י כפל משמאל, הפעולה נאמנה $|H|=m$

נסמן $G=\{g_1,\dots,g_n\}$, $H=\{h_1,\dots,h_m\}$. נגדיר

$X=\{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m\} \qquad |X|=n+m$

$(g,h)*a_i$ = "יפעל כמו ש-g פועל על g_i"

$(g,h)*b_j$ = "יפעל כמו ש-h פועל על h_j"

יותר טוב:

$$X=\{\underbrace{(g_1,0),\dots,(g_n,0)}_{\text{עותק של } G},\underbrace{(h_1,1),\dots,(h_m,1)}_{\text{עותק של } H}\}$$

$$(g,h)*(g_i,0)=(gg_i,0)$$

$$(g,h)*(h_j,1)=(hh_j,1)$$

צריך לבדוק שזו אכן פעולה, והיא פועלת באופן נאמן:

יהי $(e,e)\neq(g,h)\in G\times H$. צ"ל שקיים $x\in X$ כך ש- $(g,h)*x\neq x$.

אם $g\neq e$, $(g,h)*(e_G,0)=(g,0)\neq(e_G,0)$

אם $g=e$, $h\neq e$, $(g,h)*(e_H,1)=(h,1)\neq(e_H,1)$.

G חבורה שפועלת על קבוצה X באופן נאמן וטרנזיטיבי.

אם $|G|=|X|$, האם אפשר להגיד ש-G אבלית?

$$\forall x_1,x_2\in X\ \exists g\in G:\ x_2=g*x_1$$

נקבע $x\in X$. $\{g*x \mid g\in G\}$

G פועלת על עצמה על ידי כפל משמאל. זו פעולה שהיא נאמנה וטרנזיטיבית.

לכן G לא בהכרח אבלית.

תכונות שנשמרות ע"י הומומורפיזמים:

נניח $f: G \longrightarrow H$ הומומורפיזם.

- אם G אבלית, $f(G)$ אבלית.
- אם G ציקלית, $f(G)$ ציקלית.
- $f(e)=e$
- $f(g^{-1})=f(g)^{-1}$
- $f(g^n)=f(g)^n$
- $\ker f \trianglelefteq G$
- $o(f(g)) \mid o(g)$. יש שוויון אם f חח"ע.
- אם G נוצרת סופית אז $f(G)$ נוצרת סופית.

$$f: \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$
$$f(n) = n \pmod 2$$

יהי $n \geq 4$ טבעי, $G=S_n$. כמה ת"ח של G צמודות ל- A_{n-1},

שהיא תת החבורה המגיעה של $\{1,\dots,n-1\}$ שמשאירות את n במקום.

H צמודה ל- A_{n-1} אם קיים $g \in G$ כך ש- $gHg^{-1}=A_{n-1}$

$H=g^{-1}A_{n-1}g$

G פועלת על אוסף תת-החבורות שלה ע"י הצמדה

$|orb(A_{n-1})| = \text{כמות תת-החבורות הצמודות} = [S_n : stab_{S_n}(A_{n-1})]$

$stab_{S_n}(A_{n-1}) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma A_{n-1} \sigma^{-1} = A_{n-1}\}$

א. אם $\sigma \in stab_{S_n}(A_{n-1})$ אז $\sigma(n)=n$.

ב. לכל σ כך ש- $\sigma(n)=n$, $\sigma A_{n-1}\sigma^{-1}=A_{n-1}$.

$$|stab_{S_n}(A_{n-1})| = \left|\underset{\sigma(n)=n \text{ כך ש}}{\text{כמות התמורות ב-} S_n}\right| = (n-1)!$$

$$\Downarrow$$

$$|orb(A_{n-1})| = [S_n : stab_{S_n}(A_{n-1})] = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$n=4$ $\qquad A_3 = \{id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \leq S_4$

אם $\sigma(4)=4 \Leftarrow \sigma A_3 \sigma^{-1} = A_3$ (כי $A_3 \triangleleft S_3$)

$\sigma(4)=1$

תזכורת:

מצאו תמורות שלא צמודות ב-A_5 וצמודות ב-S_5.

[$g,h\in G$ צמודים אם $\exists x\in G:\ h=xgx^{-1}$]

id

$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)$

$(\cdot\cdot\cdot)$

$(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)$

נסמן $\sigma=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\in A_5$

$\tau=(1\ 2\ 3\ 5\ 4)\in A_5$ צמודות ב-S_5

אם היה π כך ש- $\tau=\pi\sigma\pi^{-1}$

$$(1\ 2\ 3\ 5\ 4) = (\pi(1)\ \pi(2)\ \pi(3)\ \pi(4)\ \pi(5))$$

יש 5 אפשרויות ל-π:

א. $\pi=(4\ 5)\notin A_5$

ב. $\pi=(1\ 4\ 3\ 2)\notin A_5$

$\pi(2)=1$
$\pi(3)=2$
$\pi(4)=3$
$\pi(5)=5$
$\pi(1)=4$

$\pi(3)=1$
$\pi(4)=2$
$\pi(5)=3$
$\pi(1)=5$
$\pi(2)=4$

$\pi=(1\ 5\ 3)(2\ 4)\notin A_5$

$\pi(4)=1$
$\pi(5)=2$
$\pi(1)=3$
$\pi(2)=5$
$\pi(3)=4$

$\pi=(1\ 3\ 4)(2\ 5)\notin A_5$

ה. ...

מצא ת"ח של S_4 שאיזומורפית ל- $\{1,-1,i,-i\}$
$\langle i\rangle \cong \mathbb{Z}_4$

למשל $\langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle$.

בוחן, שאלה 3ב:

S_n פועלת על $X=\{1,\dots,n\}^2$ לפי:

$$\sigma*(i,j)=(\sigma(i),\sigma(j))$$

אבחנה:

$$\sigma*(i,i)=(\sigma(i),\sigma(i))$$

$$orb((1,1))=\{\sigma*(1,1)\mid\sigma\in S_n\}=\{(\sigma(1),\sigma(1))\mid\sigma\in S_n\}=\{(i,i)\mid 1\le i\le n\}$$

$$orb((1,2))=\{\sigma*(1,2)\mid\sigma\in S_n\}=\{(\sigma(1),\sigma(2))\mid\sigma\in S_n\}\underset{\text{נוכיח}}{=}\{(i,j)\mid 1\le i,j\le n,\ i\neq j\}$$

אם $i\neq j$ קיימת תמורה $\sigma\in S_n$ כך ש- $\sigma(1)=i$, $\sigma(2)=j$ (נעדכן $\sigma(1)=i$, $\sigma(2)=j$ ונמלא את השאר כך שתהיה תמורה)

אז $\sigma*(1,2)=(i,j)$.