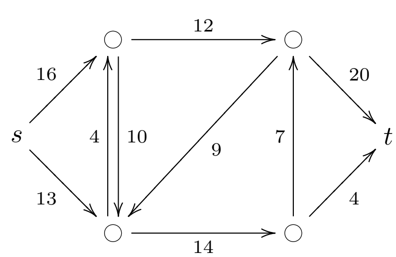
רשתות זרימה

אפשר לחשוב על רשת זרימה כעל רשת של צינורות שמכניסים מים לנקודת המקור ורוצים שזה יגיע ליעד. בצינורות מים אי אפשר להזרים יותר מאשר הקוטר של המים, וגם אי אפשר להזרים ברשת יותר מרוחב הפס. רוצים לדעת מה הכמות המקסימלית שניתן להזרים ברשת בלי שזה יעבור את הקיבולת של הרשת.

הגדרה - רשת זרימה

גרף מכוון $G=(V,E)$ שבו לכל קשת $(u,v)\in E$ יש <u>קיבולת</u> $c(u,v)>0$.
(נגדיר לכל $(u,v)\notin E$ $c(u,v)=0$)
ברשת יש קודקוד מקור s וקודקוד יעד t.

דוגמה



הגדרה - זרימה על רשת זרימה G

היא פונקציה $f:V\times V\to\mathbb{R}$ המקיימת:

1. <u>אילוצי קיבולת</u>: $f(u,v)\le c(u,v)$
2. <u>סימטריה נגדית</u>: $f(u,v)=-f(v,u)$
3. <u>שימור הזרימה</u>: $\forall_{u\in V-\{s,t\}}\sum\limits_{v\in V} f(u,v)=0$

$$\sum_{v\in V} f(u,v)=\sum_{\substack{v\in V\\ f(u,v)>0}} f(u,v)+\sum_{\substack{v\in V\\ f(u,v)<0}} f(u,v)$$

$\sum_{\substack{v \in V \\ f(u,v) > 0}} f(u,v)$ - הזרימה ה"אמיתית" היוצאת מu. $\sum_{\substack{v \in V \\ f(u,v) < 0}} f(u,v)$ - הזרימה ה"אמיתית" הנכנסת לu. מתקיים:

$$\sum_{\substack{v \in V \\ f(u,v) < 0}} f(u,v) = \sum_{f(u,v)<0} (-f(v,u)) = -\sum_{\substack{f(u,v) > 0 \\ v \in V}} f(v,u)$$

$$0 = \sum_{v \in V} f(u,v) = \sum_{\substack{v \in V \\ f(u,v) > 0}} f(u,v) - \sum_{\substack{v \in V \\ f(v,u) > 0}} f(v,u)$$

$$\sum_{\substack{v \in V \\ f(u,v) > 0}} f(v,u) = \sum_{\substack{v \in V \\ f(u,v) > 0}} f(u,v)$$

מקרה 1

$$u \qquad\qquad v$$

$$c(v,u) = c(u,v) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 = -c(v,u) \le -f(v,u) = f(u,v) \le c(u,v) = 0 \\ f(v,u) \le c(v,u) = 0 \end{array}}$$

$$f(u,v) = f(v,u) = 0$$

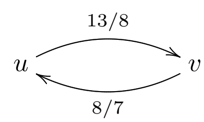
מקרה 2

$$u \xrightarrow{4/8} v$$

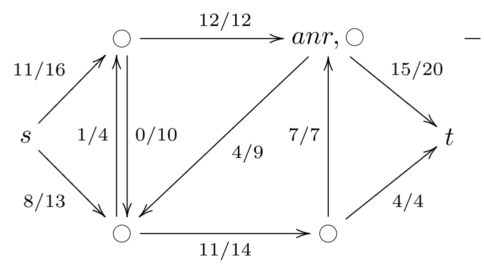
(ה8 זה רוחב הפס, ה4 זה הניצול בפועל)

$$\begin{array}{rl} f(u,v) = 4 & c(u,v) > 0 \\ f(v,u) = -4 & c(v,u) = 0 \end{array}$$

מקרה 3



נחזור לדוגמה



הזרימה בפועל בצינור(המספר השמאלי) לא יכולה לעלות על הקיבולת של הצינור(המספר הימני), והזרימה בפועל הנכנסת שווה לזרימה בפועל היוצאת בכל קודקוד - פרט לs וt, והזרימה שיוצאת מs שווה לזרימה שנכנסת לt.

הגדרה - ערך הזרימה

$$|f| = \sum_{v\in V} f\left(s,v\right)$$

סימון

עבור $X,Y\subseteq V$ נסמן $f\left(x,y\right) = \sum\limits_{x\in X}\sum\limits_{y\in Y} f\left(x,y\right)$

דוגמה לסימון

$$|f| = f\left(\left\{s\right\},V\right)$$

דוגמה - שימור הזרימה

$$\forall u\in V-\left\{s,t\right\}:\quad f\left(\left\{u\right\},V\right)=0$$

למה

בהינתן רשת זרימה $G=(V,E)$ וזרימה f על G אזי עבור:

1. $X\subseteq V$: $f(X,X)=0$
2. $X,Y\subseteq V$: $f(X,Y)=-f(Y,X)$
3. $X,Y,Z\subseteq V$, $X\cap Y\neq\emptyset$:

$$f(X\cup Y,Z)=f(X,Z)+f(Y,Z)$$

$$f(Z,X\cup Y)=f(Z,X)+f(Z,Y)$$

טענה

$$|f|=f(V,t)$$

הוכחה

$$|f|=f(s,V)=\overbrace{f(V,V)}^{=0}-f(V-\{s\},V)=$$

$$=-f(V-\{s\},V)=f(V,V-\{s\})=$$

$$=\underbrace{f(V,V-\{s\}-\{t\})}_{=0:\downarrow}+f(V,t)=0$$

$$f(V,V-\{s,t\})=-f(V-\{s,t\},V)=-\sum_{u\in V-\{s,t\}}f(u,V)=-\sum 0=0$$

בעיית מיקסום זרימה

קלט: רשת זרימה (t,s,c,G)

פלט: זרימה f (על G) כך ש$|f|$ מכסימום

שיטה של פורד פלקרסון (Ford-Fulkerson)

1. אתחל עם זרימת-0 (כלומר $\forall_{u,v\in V} f\left(u,v\right)=0$)
2. כל עוד יש "מסלול שיפור" p הוסף זרימה על המסלול p

הכוונה בשיפור מסלול:

$$s \xrightarrow{3/16} \bigcirc \xrightarrow{2/7} \bigcirc \xrightarrow{9/12} \bigcirc \xrightarrow{1/11} \bigcirc \xrightarrow{22/100} \bigcirc$$

את המסלול הזה אפשר לשפר ע"י הוספת 3:

$$s \xrightarrow{6/16} \bigcirc \xrightarrow{5/7} \bigcirc \xrightarrow{12/12} \bigcirc \xrightarrow{4/11} \bigcirc \xrightarrow{25/100} \bigcirc$$

נשים לב שמכיוון שאנו מוסיפים אותו מספר גם לקשת יוצאת וגם לקשת נכנסת, אנחנו שומרים על הסימטריה הנגדית

הגדרה

הקיבולת השיורית

$$c_f\left(u,v\right)=c\left(u,v\right)-f\left(u,v\right)$$

רשת השיורית

(עבור רשת זרימה $G=\left(V,E\right)$ וזרימה f)

$$G_f=\left(V,E_f\right)$$

$$E_f=\left\{\left(u,v\right)\in V\times V|c_f\left(u,v\right)>0\right\}$$

מסלול שיפור

הגדרה: מסלול p מs לt בG_f

נכתוב בצורה יותר מפורטת את האלגוריתם:

Ford-Fulkerson(G,c,s,t)
for each $(u,v)\in E\left(G\right)$

  f$(u,v)\leftarrow 0$, $f\left(v,u\right)\leftarrow 0$, $c_f\left(u,v\right)\leftarrow c\left(u,v\right)$

while $\exists p$ from s to t in G_f

$c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u,v) | (u,v) \in p\}$

`for each` $(u,v) \in p$

$f(u,v) \leftarrow f(u,v) + c_f(p)\,,\;\; f(v,u) \leftarrow -f(u,v)$

$c_f(u,v) \leftarrow c(u,v) - f(u,v)$

$c_f(v,u) \leftarrow c(v,u) - f(v,u)$

הגדרה - חתך ברשת זרימה ($G = (V,E)$)

הוא חלוקה של הקודקודים (S,T) (כלומר $\begin{matrix} S \cap T = \emptyset \\ S \cup T = V \end{matrix}$) כך ש$s \in S$, $t \in T$

הזרימה על חתך (S,T)

$$f(S,T) = \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} f(x,y)$$

טענה

לכל חתך (S,T) ולכל זרימה f

$$|f| = f(S,T)$$

הוכחה

$$f(S,T) = f(S,V) - f(S,S) = f(S,V) = f(S-\{s\},V) + f(\{s\},V) = f(\{s\},V)$$

הגדרה - קיבולת של חתך

$$c(S,T) = \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} c(x,y)$$

טענה

לכל זרימה f ולכל חתך (S,T)

$$|f| \leq c(S,T)$$

הוכחה

לפי הטענה הקודמת $|f| = f(S,T)$

$$|f| = f(S,T) = \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} f(x,y) \leq \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} c(x,y) = c(S,T)$$

מסקנה

עבור זרימת המכסימום f^*, $|f^*| \leq c(S,T)$(לכל (S,T))

משפט פורד-פילקרסון

בהינתן רשת זרימה $G = (V,E)$(עם c,S,T) וזרימה f על G, אז התנאים הבאים שקולים:

1. f זרימת מכסימום
2. ברשת השיורית G_f אין מסלול שיפור
3. קיים חתך (S,T) כך ש$|f| = c(S,T)$

הוכחה

$(1) \Leftarrow (2)$ בשלילה, אם יש מסלול שיפור אז ניתן להגדיל את $|f|$. סתירה.

$(2) \Leftarrow (3)$ ברשת השיורית אין מסלול מS לT בG_f.

נגדיר: $S = \{v \in V | v$ יש מסלול מs ל$\}$
$T = \{v \in V | v$ אין מסלול מs ל$\}$

$S \cap T = \emptyset$, $S \cup T = V$, $s \in S$, $t \in T$(כי $t \notin S$) $\Leftarrow$ לכן (S,T) חתך.

$$|f| = f(S,T) = \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} \stackrel{?}{=} \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} c(x,y) = c(S,T)$$

לכל $x \in S$, $f(x,y) = c(x,y)$. $x \in S$ לכן יש מסלול מs לx בG_f. אם $f(x,y) < c(x,y)$ אז יש קשת בG_f מx לy ואז יש מסלול מs לy. אבל $y \in T$, כלומר אין מסלול מs לy(סתירה)

$(3) \Leftarrow (1)$ בשלילה אם $|f| = c(S,T)$ וf אינה זרימת מכסימום אז ניתן להגדיל את $|f|$ בסתירה לטענה ה2.

■