פירוט נוסף של כמה פתרונות תרגילי כיתה (27.03.2019)

1. יהי M מרחב מטרי ויהיו $(1 \le i \le n)$ $K_i \subseteq M$ תת-מרחבים שלו קומפקטיים.
נסמן: $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$.

א) אם $M = \mathbb{R}^n$ (עם מטריקה אוקלידית) **תוכיחו** בעזרת משפט היינה בורל שתת-מרחב K קומפקטי.

<u>הוכחה.</u>
לפי משפט היינה בורל: K_i קומפקטיים ולכן K_i תת-קבוצות סגורות וחסומות.
אזי K סגורה כאחוד סופי של קבוצות סגורות. נשאר להוכיח ש- K גם חסומה.
לכל $1 \le i \le n$ K_i חסומה, ז"א: קיימים $x_i \in \mathbb{R}^n$ ו- $r_i \in \mathbb{R}$ כך ש- $K_i \subseteq B(x_i, r_i)$.
נוכיח ש-$K \subseteq B(x_1, R)$, כאשר $R = \max\limits_{1 \le i \le n}\{r_i + d(x_i, x_1)\}$.
יהי $x \in K$, אזי קיים i_0 כך ש-$x \in K_{i_0}$. אז $x \in B(x_{i_0}, r_{i_0})$. לכן $d(x, x_{i_0}) < r_{i_0}$
ולפי אישוויון המשולש והגדרה של R:
$d(x, x_1) \le d(x, x_{i_0}) + d(x_{i_0}, x_1) < r_{i_0} + d(x_{i_0}, x_1) \le R$, ז"א, $x \in \boldsymbol{B(x_1, R)}$. ■

ב) **תוכיחו** שתת-מרחב $\boldsymbol{K = K_1 \cup \ldots \cup K_n}$ קומפקטי אם M מרחב מטרי <u>כלשהו.</u>
<u>הוכחה</u>. (בעזרת הגדרת הקומפקטיות. אינדוקציה לפי n)

<u>בסיס האינדוקציה</u>: $\boldsymbol{n = 2}$.

יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של $K = K_1 \cup K_2$, זאת אומרת $K = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$, כאשר $U_\alpha \subseteq M$ קבוצות <u>פתוחות ב-K</u>.

זה אומר (ההרצאות) שלכל $\alpha \in I$ קיימת קבוצה V_α <u>פתוחה ב-M</u> כך ש- $U_\alpha = V_\alpha \cap K$. לכן.

$K = \cup_{\alpha \in I} (V_\alpha \cap K) = (\cup_{\alpha \in I} V_\alpha) \cap K$. זה גורר: $\cup_{\alpha \in I} V_\alpha \supseteq K$.

לכן: $\cup_{\alpha \in I} V_\alpha \supseteq K_1 \Leftarrow (\cup_{\alpha \in I} V_\alpha) \cap K_1 = K_1$. אבל (תורת הקבוצות) $(\cup_{\alpha \in I} V_\alpha) \cap K_1 = \cup_{\alpha \in I} (V_\alpha \cap K_1)$,

זאת אמרת, $\cup_{\alpha \in I} (V_\alpha \cap K_1) = K_1$. כל הקבוצות $V_\alpha \cap K_1$ פתוחות ב-K_1 (ההרצאות)

ולכן $\boldsymbol{\{V_\alpha \cap K_1\}_{\alpha \in I}}$ **– כיסוי פתוח של תתמרחב $\boldsymbol{K_1}$.**

כיוון ש- K_1 – קומפקטי הכיסוי הזה מכיל תת-כיסוי סופי $\{V_{\alpha_1} \cap K_1, V_{\alpha_2} \cap K_1, \ldots, V_{\alpha_M} \cap K_1\}$ (כאשר $\alpha_i \in I$)

כך ש- $\boldsymbol{(V_{\alpha_1} \cap K_1) \cup (V_{\alpha_2} \cap K_1) \cup \ldots \cup (V_{\alpha_M} \cap K_1) = K_1}$.

בדיוק באותה לוגיקה: $\cup_{\alpha \in I} V_\alpha \supseteq K_2$ ולכן קיים אוסף סופי של קבוצות $V_{\beta_1}, V_{\beta_2}, \ldots, V_{\beta_N}$ (כאשר $\beta_j \in I$)

כך ש- $\boldsymbol{(V_{\beta_1} \cap K_2) \cup (V_{\beta_2} \cap K_2) \cup \ldots \cup (V_{\beta_N} \cap K_2) = K_2}$**.**

נסתכל עכשיו באוסף הקבוצות $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_M}, V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_N}\}$. הן כולן פתוחות ב-$M$.

לכל $1 \le i \le M$ מקבלים: $U_{\alpha_i} = V_{\alpha_i} \cap K \supseteq V_{\alpha_i} \cap K_1$.

לכל $1 \le j \le N$ מקבלים: $U_{\beta_j} = V_{\beta_j} \cap K \supseteq V_{\beta_j} \cap K_2$.

באחוד לפי i מקבלים:

$$U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \ldots \cup U_{\alpha_M} \supseteq \left(V_{\alpha_1} \cap K_1\right) \cup \left(V_{\alpha_2} \cap K_1\right) \cup \ldots \cup \left(V_{\alpha_M} \cap K_1\right) = K_1 .$$

באחוד לפי j מקבלים:

$$U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2} \cup \ldots \cup U_{\beta_N} \supseteq \left(V_{\beta_1} \cap K_2\right) \cup \left(V_{\beta_2} \cap K_2\right) \cup \ldots \cup \left(V_{\beta_N} \cap K_2\right) = K_2 .$$

באחוד של אגפיי שמאל וימין מקבלים:

$$U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \ldots \cup U_{\alpha_M} \cup U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2} \cup \ldots \cup U_{\beta_N} \supseteq K_1 \cup K_2 = K .$$

כיוון ש- כל הקבוצות U_α מוכלות ב-K, מקבלים:

$$\boldsymbol{U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \ldots \cup U_{\alpha_M} \cup U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2} \cup \ldots \cup U_{\beta_N} = K} ,$$

ז"א, $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_M}, U_{\beta_1}, U_{\beta_2}, \ldots, U_{\beta_N}\}$ תת-כיסוי סופי של הכיסוי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ולכן K קומפקטי.

צעד האינדוקציה . תהי הטענה נכונה כאשר $n = k$, ז"א אחוד של כל k תתמרחבים קומפקטיים גם קומפקטי.

אזי אם תת-מרחבים $K_1, K_2, \ldots, K_k, K_{k+1}$ קומפקטיים, אנחנו מקבלים:

$$\boldsymbol{K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_k \cup K_{k+1} = (K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_k) \cup K_{k+1}} .$$

כאן:

- באגף ימין האחוד בסוגריים קומפקטי לפי הנחת האינדוקציה,
- קומפקטיות האחוד של **שני** תת-מרחבים קומפקטיים הוכחה בסעיף הקודם.

זה מוכיח שהתת-מרחב באגף הימין קומפקטי , אזי - גם התת-מרחב באגף השמאל, ולכן

הטענה נכונה גם כאשר $n = k + 1$.■

2. יהי M מרחב מטרי . תהי x_n סדרה ב-שמתכנסת ל-$x \in M$. תהי $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x\}$.
תוכיחו ש- A תת-מרחב קומפקטי .

הוכחה (בעזרת הגדרת הקומפקטיות):
יהי $\{U_\alpha \subseteq A\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של תת-מרחב A. אזי קיימת משפחת קבוצות $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ פתוחות ב-M כך ש-
לכל $\alpha \in I$: $\boldsymbol{U_\alpha = V_\alpha} \cap A$. אזי $A \subseteq \cup_{\alpha \in I} V_\alpha$ וקיים $\alpha_0 \in I$ כך ש- $a \in V_{\alpha_0}$. כיוון ש- $a_n \to a$, קיים n_0
כך שכל איברי הסדרה החל מאיבר מספר n_0 מוכלים ב- V_{α_0} ולכן גם ב-U_{α_0} . אבל כל איבר a_n
כאשר $1 \le n < n_0$ מכוסה על ידי איזושהי קבוצה U_{α_n}. לכן אוסף הקבוצות הסופי
$\{U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_{n-1}}\}$ מכסה את A ואנחנו מצאנו תת-כיסוי סופי בתוך $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$.■