פתרון מבחן לדוגמא

1 (א)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))\cdot\sin(\ln(1+\sin x))}{(1-\cos(x))^2 e^{\sin x}} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1}{e^{\sin x}}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{x^4}{(1-\cos(x))^2}}_{4}\cdot\frac{1}{x^4}\cdot\underbrace{\frac{\sin(\ln(1+\sin x))}{\ln(1+\sin x)}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}}_{1}\cdot$$

$$\boxed{\lim_{\square\to 0}\frac{\ln(1+\square)}{\square}=1}$$

$$\cdot\sin x\cdot\ln(\cos(x))=$$

$$\lim_{\square\to 0}\frac{1-\cos(\square)}{\square^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\ln(\cos(x))}{x\cdot x^3}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\cdot\frac{\ln(\cos(x))}{x^3}$$

*לפני שעושים לופיטל צריך לכתוב $\left(\frac{0}{0}\right)$

(גבול לופיטל קיים בסביבה "מנוקבת")

כאן נעזר <u>לופיטל</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x^3}\overset{\text{Lopital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{3x\cos x}$$

$\frac{1}{3x\cos x}\to -\infty$, ∞

$$\boxed{\sqrt[n]{\text{קבוע}}=1}$$

מצד ימין נקבל ∞ ומצד שמאל $-\infty$ ולכן זהו הגבול,
אבל הגבול שונה מימין ומשמאל - ולכן <u>אין</u> גבול!

(ב)

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos(x))^x\ (0^0)=\lim_{x\to 0}e^{\ln(1-\cos(x))^x}=e^{\lim_{x\to 0}x\ln(1-\cos(x))^x}$$

הקוסינוס לא שואף לאינסוף הצבה כיוון לא רלוונטי

$$\lim_{x\to 0}x\ln(1-\cos(x))=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos(x))\to-\infty}{\frac{1}{x}\to\infty,\ -\infty}\quad\left(\frac{-\infty}{\infty}/\frac{-\infty}{-\infty}\right)\to\text{לופיטל}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}-\underbrace{\frac{x^2}{1-\cos x}}_{2}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{0}=0$$

ולכן הגבול $e^0=1$

2

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{1+n+n^2}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{n^2\left(\underset{0}{\frac{1}{n^2}}+\underset{0}{\frac{1}{n}}+1\right)}=\underbrace{(\sqrt[n]{n})^2}_{1}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1}\to 1$$

$1^0\to 1$

(יש סוף אגב - סנדוויץ', מבחן המנה וכו')

3 (א)

$$\int\sin(\ln(x))\,dx=x\sin(\ln(x))-\int\cos(\ln x)\,dx=x\sin(\ln(x))-\left[x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln(x))\,dx\right]$$

$f'=1$, $g=\sin(\ln(x))$
$f=x$, $g'=\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

$f'=1$, $g=\cos(\ln x)$
$f=x$, $g'=-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

$$\int\sin(\ln x)\,dx=\frac{x\sin(\ln(x))-x\cos(\ln(x))}{2}+C$$

חזרה למקרות? הכוונה שקיבלנו שוב את האינטגרל מצד שמאל, אזי
(יוצא) $2a=\dots$ ולכן נחלק ב-2 ונגיע לפתרון של מה שחיפשנו.

ד) $\int_1^{\infty} x e^{-x} dx \;(\infty \cdot \frac{1}{\infty})$ $= -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

$f' = e^{-x} \quad g = x$
$f = -e^{-x} \quad g' = 1$

קודקוים בשוני מסוקך ע' מבחן השוואה של חברים...

אם קיים פונקציה גדולה יותר שמתכנסת אזי מתכנס, ואם יש פונקציה קטנה יותר שלא מתכנסת אזי גם הוא לא מתכנס.

$$\int_1^{\infty} x e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} -t \cdot e^{-t} - e^{-t} - [-e^{-1} - e^{-1}] = \lim_{t\to\infty} -t \cdot e^{-t} - e^{-t} = 0$$

$F(t) - F(1)$, $\quad -\frac{2}{e}$, $\quad -\frac{t}{e^{t}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \to 0$, $\quad e^{-\infty} = 0$

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{t}{e^{t}} \xrightarrow{\text{לופיטל}} \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{e^{t}} = -0$$

$$\lim_{t\to\infty} -t \cdot e^{-t} - e^{-t} + + \frac{2}{e} = \frac{2}{e}$$

3) ג) $f(0)=1$, f רציפה ב-R, $f(x) \neq x$ לכל x

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{צ"ל}$$

$h(x) = f(x) - x \neq 0$
(הפרש רציפים)

h בעלת סימן קבוע אחרת אם היה מחליפה סימן כיוון שהיא רציפה (f רציפה, ו-x רציפה) לפי ערך הביניים היה מתאפסת בסתירה.

$h(0) = 1 - 0 = 1$

לכן לכל x, $h(x) > 0$
לכן לכל x, $f(x) > x$

$\lim_{x\to\infty} x = \infty$ ולכן כמובן $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ לפי חב סנדוויץ'

ד) x^2+1, e^x

נתון שגזירה

* לא מקבלים ניקוד אלא על ציור של גרף באיפי...

$f'(x) \geq 1$ (ספיק g)
$g'(x)$

אם פונקציה גדולה מהנקודה שלה לא בהכרח שהנגזרת שלה גדולה מהנגזרת של הנקודה. כלומר, שהשיפוע שלה חיובי/שלילי.

$(x^2+1)' = 2x$
לא בהכרח גדול שווה מ 1.

$(e^x)' = e^x$
לא בהכרח גדול שווה מ1.

$x^2 + 1 \neq x$
$x^2 - x + 1 \neq 0$
$\Delta = 1 - 4 < 0$
ולכן מרחפת...

$e^x \neq x$
נחקור את הפונקציה, לאחר שנפקיר אגפים.

$h(x) = e^x - x$
$h'(x) = e^x - 1$
$e^x = 1$
$x = 0 \leftarrow$ נקודה חשודה

$-1 \quad 0 \quad +1$
$- \quad + $

מינימום והאפקצה 1

$h(0) = 1 - 0 = 1 > 0$

לכן לכל x $h(x) > 0$

h לא מתאפסת ולכן $e^x - x \neq 0 \rightarrow e^x \neq x$

מסך

4 א $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=f'(0)$ (גורר רציפה, נגזרות ביוסף כפר) f גזירה ותיובית

צ"ל $f(0)=1$

* אין שום סימן שאם הנגזרת של שתי פונקציות אחת זהה' אותה הפונקציה – מכסה!
$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}$
$\Downarrow$
$1\neq 2$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=f'(0)$
$x\to 0$

על מנת שיהיה גבול סופי צריך שהמונה יהיה 0.

$f(x)-1=\frac{f(x)-1}{x}\cdot x$
$\frac{f(x)-1}{x}\to f'(0)$, $x\to 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)-1=0$

*תשובה: המכנה שואף ל-0, ואם קיים גבול סופי אז המונה גם חייב לשאוף ל-0.

מצד שני $\lim_{x\to 0} f(x)-1=f(0)-1$
כי f רציפה

$f(0)-1=0$
$f(0)=1$

* f נקראת גזירה אם הגבול סופי

ב נתון $\ln(f(x_0))=x_0$ לכל
צ"ל קיים $f'(c)=f(c)$

דוגמה: $f(x_0)=e^{x_0}$
$f(x)=e^x$
זה שפונקציה זה לא אומר שזה אותו דבר.

ש נגזרת – זה רומז ללגרנז' (נבחר פונקציה שרואים בשאלה)

$h(x)=\ln(f(x)),\quad [0,x_0]$

$f>0$ ולכן ההרכבה בתחום ההגדרה והרכבה של גזירות היא גזירה ולכן h גזירה בקטע הפתוח $(0,x_0)$ ורציפה בקטע הסגור.

לגרנז' –
$$\frac{h(x_0)-h(0)}{x_0-0}=h'(c)$$
$0<c<x_0$

$$\frac{\ln(f(x_0))-\ln(f(0))}{x_0-0}=\frac{f'(c)}{f(c)}=h'(c)$$

$$1=\frac{\ln(f(x_0))-\overset{0}{\ln(1)}}{x_0}=\frac{f'(c)}{f(c)}$$

$$f'(c)=f(c)$$

5 א אי שוויון נוסח על תקירה או גם לגרנז'

לכל $x>0$ $\ln(1+x)<x$

I. נפעיל לגרנז' בקטע $[0,x]$ על $\ln(1+x)$

$$\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}=\frac{1}{1+c}<1\qquad 0<c<x$$

$x>0$ לכן מותר לכפול בו

$$\ln(x+1)<x$$

בס"ד

.II $h(x)=\ln(1+x)-x$

צ"ל $h(x)<0 \quad , \quad x>0$

לכל $h'(x)=\frac{1}{1+x}-1<0$ $x>0$

ולכן h יורדת לכל $x>0$

$h(0)=0$

* אסור אינדוקציה לפונקציות, עובדת רק על n!

h מתחילה באפס ויורדת ולכן אזי $h(x)<0$ לכל $x>0$

(ד) הוכח $a_1=1 \quad a_{n+1}=\ln(1+a_n)$ מתכנסת ומצא את גבולה

$$a_{n+1}-a_n=\ln(1+a_n)-a_n<0$$

נכון לכל $a_n>0$ לא צריך להוכיח, ונשתמש באינדוקציה.

נניח $a_{n+1}<a_n$

צ"ל $a_{n+2}<a_{n+1}$

$\ln(1+a_{n+1})<\ln(1+a_n)$ הפונקציה מונוטונית ולכן: $e^x<e^y \Updownarrow x<y$

ln מונוטונית ולכן

$1+a_{n+1}<1+a_n$

$a_{n+1}<a_n$ הנחנו לנכון - מש"ל

* אסור להפעיל פעולה על אי שוויון אלא אם ידוע שהיא מונוטונית (אחרת-אם היא יורדת-הופכים סימן)

נוכיח באינדוקציה $a_n>0$

$a_1=1>0 \quad n=1$

נניח נכון עבור n $a_n>0$

נוכיח עבור $n+1$ $a_{n+1}>0$

$\ln(1+a_n)>0 \qquad 1+a_n>1 \to \ln(1+a_n)>0$

a_n יורדת ; $\forall n | a_n>0$

ולכן חסומה ומונוטונית ⇐ מתכנסת.

נסמן $a_n\to L$ ולכן $L=\ln(1+L)$ לפי סעיף ג' $L\le 0$

$L=0 \Leftarrow L\ge 0 \leftarrow a_n>0 \,,\, L\le 0$

(לפי סעיף ג' הדרך היחידה שיהיה שוויון $L\le 0$ כי כש $L>0$ לא יהיה שוויון)

(6)(ה) $a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f'(\frac{i}{n})f(\frac{i}{n})=$ סכום רימן בקטע $[0,1]$ עם החלוקה $\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\}$ $f'(x)\cdot f(x)$

$a_n\to ?$

$$\int_0^1 f'(x)f(x)dx=\left\{\begin{matrix}f(x)=t\\ f'(x)dx=dt\end{matrix}\right\}$$

$$=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{(f(x))^2}{2}+C$$

$$\int_0^1 f'(x)f(x)dx=\frac{f(1)^2-f(0)^2}{2}$$

סכום רימן-שהנקודות יהיו בין 0-1 כי החלוקה בין 0 ל-1, כשהיא $\frac{1}{n}$ כך שהאיבר שמופיע לא משנה לו, ורצופה בין 0 ל-1.

(ו) $\sin^2(1)=? \quad h=0.05 \qquad f(x)=\sin^2(x) \quad a=0 \quad x=1$

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin(2x) \quad f''(x)=2\cos(2x) \quad f'''(x)=-4\sin(2x)$

$\left|\frac{f'''(c)}{3!}(1-0)^3\right|=\frac{4}{3!}|\sin(2c)|\le\frac{4}{3!}$ הטעות בפיתוח של $n=2$ היא שגיאה = 1 - הגזרות

$f''''(x)=-8\cos(2x) \quad f^{(5)}(x)=16\sin(2x) \quad f^{(6)}(x)=32\cos(2x)$

$\left|\frac{f^{(6)}(c)}{6!}(1-0)^6\right|=\frac{32}{6!}\cdot|\cos(2c)|\le\frac{32}{6!}\approx 0.04$ של $n=5$ $\quad 0<c<1$

$\sin^2(1)\approx f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{f''(0)}{2}(1-0)^2+\dots+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}(1-0)^5=0+0+1+0-\frac{8}{4!}=0.666\dots$

$\sin^2(1)=0.707$
-0.666
0.041