תרגול 7 - פונקציות

3 באוגוסט 2020

1 הגדרה, חח"ע, על

תהיינה A, B קבוצות. יחס $f \subseteq A \times B$ המקיים:

- $\forall a \in A \exists b \in B : afb$
- $afb \wedge afc \Rightarrow b = c$ (חד ערכיות)

נקרא פונקציה. במקרה כזה נהוג לסמן:

$$f : A \to B$$

$$afb \leftrightarrow f(a) = b$$

$$a \mapsto b$$

פונקציה $f : A \to B$ נקראת חח"ע אם מתקיים:

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

או באופן שקול:

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

פונקציה $f : A \to B$ נקראת על אם מתקיים:

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$$

התמונה של פונקציה היא:

$$Im(f) = \{b \in B | \exists a \in A, f(a) = b\}$$

תרגילים:

1. מצאו את כל הפונקציות מ־ $\{1,2,3\}$ ל־$\{5,7\}$.
פתרון:

$$f_1 = \{(1,5),(2,7),(3,7)\}$$

$$f_2 = \{(1,5),(2,5),(3,5)\}$$

$$\vdots$$

בסה"כ יש 8 פונקציות. כי לכל אחד מ $\{1,2,3\}$ יש שתי אופציות לאן להישלח: $\{5,7\}$. ומכאן מגיע סימון: $\{5,7\}^{\{1,2,3\}}$ מסמן את אוסף כל הפונקציות מ־ $\{1,2,3\}$ ל־$\{5,7\}$.

2. לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות קבעו האם היא חח"ע? האם היא על? מהי התמונה?

(א) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = \sin(x)$
פתרון: לא על, למשל אין מקור ל־2. לא חח"ע, למשל $f(0) = f(\pi)$. $Im(f) = [-1,1]$.

(ב) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^3$
פתרון: אכן חח"ע ועל. $Im(f) = \mathbb{R}$.

(ג) לא נייתן להגדיר $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = \frac{1}{x}$, כי לא לכל ממשי יש לאן להישלח - לאן נשלח את 0?

(ד) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ המוגדרת ע"י $f(z) = z^2$
פתרון: על, כי לכל מרוכב יש שורש. אבל לא חח"ע כי יש שני שורשים, למשל $1^2 = (-1)^2$. $Im(f) = \mathbb{C}$.

(ה) תהא X קבוצה, $A \subseteq X$ תת־קבוצה. פונקציית ההכלה מוגדרת:

$$i : A \to X$$

$$\forall a \in A : i(a) = a$$

פתרון: כמובן שהיא חח"ע. אם $A \neq X$ אז היא לא על. $Im(i) = A$.

(ו) $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית דיריכלה המוגדרת ע"י:

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

פתרון: לא חח"ע. לא על. $Im(D)=\{0,1\}$.

(ז) תהא X קבוצה, $A\subseteq X$ פונקציית האינדיקטור של A היא $\chi_A:X\to\{0,1\}$ המוגדרת ע"י:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

הערה: אם הטווח בדיריכלה היה $\{0,1\}$ אז היא הייתה פונקציית האינדיקטור של הרציונאליים.

פתרון: כדי שתהיה על דרוש לפחות שני איברים ב־X, וכן: $A\neq X,\emptyset$. מצאו את הדרישה כדי לקבל חח"ע.

(ח) תהא A קבוצה. הפונקציה $f:A\to P(P(A))$ המוגדרת ע"י:

$$f(a)=\{B\subseteq A : a\in B\}$$

פתרון: לדוגמא: $A=\{1,2\}$. $f(1)=\{\{1\},\{1,2\}\}\,,f(2)=\{\{2\},\{1,2\}\}$.
שימו לב שבמקרה זה $f(1)\neq f(2)$ (למרות שהחיתוך ביניהן לא ריק).
כן חח"ע: נניח $a\neq b$ צריך להוכיח $f(a)\neq f(b)$. ואכן, אם $a\neq b$ אז $\{a\}\in f(a)\wedge\{a\}\notin f(b)$ ולכן $f(a)\neq f(b)$.
לא על: נשים לב שלאיבר $\emptyset\in P(P(A))$ אין מקור, כי אם בשלילה יש $a\in A$ כך ש־ $f(a)=\emptyset$ אז נקבל מהגדרת הפונקציה $\{a\}\in f(a)$ ולכן $f(a)\neq\emptyset$.

3. מצאו פונקציות עם התכונות הבאות:

(א) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ולא על

(ב) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא על ולא חח"ע

פתרון: א. $f(n)=n+1$

ב.

$$f(n)=\begin{cases}n-1 & n\neq 1\\ 73 & n=1\end{cases}$$

לא חח"ע כי $f(1)=f(74)$.

(ג) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שהיא חח"ע ולא על

(ד) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שהיא על ולא חח"ע

פתרון: ג. $f(x)=e^x$. חח"ע, לא על כי לשליליים אין מקור.

ד.

$$f(x)=\begin{cases} tan(x) & x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k \\ 1 & x=\frac{\pi}{2}+\pi k \end{cases}$$

4. תהא A קבוצה. ו- $f:A\to\mathbb{N}$ פונקציה. נגדיר יחס R על A ע"י הכלל:

$$aRb \iff f(a)\leq f(b)$$

הוכיחו: R יחס סדר על A אמ"ם f חח"ע.

פתרון: $\Rightarrow$: נתון f חח"ע. צ"ל: R יחס סדר:

רפלקסיבי: יהי $a\in A$ אז כיון ש- $f(a)=f(a)$ נקבל aRa.

טרנזיטיבי: נניח $aRb\wedge bRc$ אז $f(a)\leq f(b)\wedge f(b)\leq f(c)$, ומטרנזיטיביות של $\leq$ נקבל $f(a)\leq f(c)$ ולכן aRc.

אנטי־סימטרי: נניח $aRb\wedge bRa$, לכן נקבל $f(a)\leq f(b)\wedge f(b)\leq f(a)$, ולכן (מאנטי־סימטרייות של $\leq$) נקבל $f(a)=f(b)$. כעת, מחח"ע של f נקבל $a=b$.

$\Leftarrow$: נתון: R יחס סדר. צ"ל f חח"ע. הוכחה: נניח $f(a)=f(b)$. לכן $f(a)\leq f(b)\wedge f(b)\leq f(a)$, ולכן $aRb\wedge bRa$ ומכיון שנתון ש-R יחס סדר נקבל $a=b$.

2 תמונה חלקית והפוכה

תהי $f:X\to Y$ [ונקציה. ותהיינה $A\subseteq X, B\subseteq Y$.

תמונה חלקית (אוסף תמונות A):

$$f[A]=\{f(a)|a\in A\}=\{y\in Y:\exists a\in A, f(a)=y\}$$

לדוגמא: $f[X]=Im(f)$

תמונה הפוכה (אוסף מקורות B):

$$f^{-1}[B]=\{x\in X:f(x)\in B\}$$

לדוגמא $f^{-1}[Y]=X$

תרגילים:

1. חשבו תמונה חלקית והפוכה:

(א) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=2x+1$. חשבו:

$$f[(1,5)]=(3,11)$$

$$f^{-1}[\{1,2,3\}]=\{0,0.5,1\}$$

(ב) עבור פונקציית דיריכלה $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

חשבו:

$$D[(1,5)]=\{0,1\}$$

$$D^{-1}[(1,5)]=\emptyset$$

$$D^{-1}[[1,5)]=\{x\in\mathbb{R}:f(x)\in[1,5)\}=\mathbb{Q}$$

2. $f:X\to Y$ פונקציה.

(א) הפריכו: לכל A_1,A_2 ת"ק של X מתקיים: $f[A_1\cap A_2]=f[A_1]\cap f[A_2]$.

(ב) האם יש הכלה שכן נכונה?

(ג) הוכיחו: f חח"ע אמ"ם לכל A_1,A_2 ת"ק של X מתקיים: $f[A_1\cap A_2]=f[A_1]\cap f[A_2]$.

פתרון: א. ניקח למשל $X=Y=\{1,2,3\}f(1)=1,f(2)=f(3)=2,A_1=\{2\},A_2=\{3\}$ ונקבל

$$A_1\cap A_2=\emptyset\Rightarrow f[A_1\cap A_2]=f[\emptyset]=\emptyset$$

אולם

$$f[A_1]=f[A_2]=\{2\}\Rightarrow f[A_1]\cap f[A_2]=\{2\}\neq\emptyset$$

ב. אכן, $f[A_1\cap A_2]\subseteq f[A_1]\cap f[A_2]$. הוכחה: יהי $y\in f[A_1\cap A_2]$. זאת

אומרת שיש $x \in A_1 \cap A_2$ כך ש־ $f(x) = y$. ולכן $y \in f[A_1]$ (כי $x \in A_1$ ו־ $f(x) = y$), וכן $y \in f[A_2]$ (כי $x \in A_2$ ו־$f(x) = y$). ולכן $y \in f[A_1]\cap f[A_2]$.
ג. $\Leftarrow$. נתון f חח"ע. כיון שהוכחנו את אחת ההכלות בסעיף קודם נותר להוכייח בכיוון השני. יהי $y \in f[A_1] \cap f[A_2]$, כיון ש־ $y \in f[A_1]$ לכן יש $x_1 \in A_1$ כך ש־ $f(x_1) = y$ וכיון ש־ $y \in f[A_2]$ לכן יש $x_2 \in A_2$ כך ש־ $f(x_2) = y$. בסה"כ $f(x_1) = y = f(x_2)$ ומחח"ע נקבל $x_1 = x_2$. ולכן $x_1 \in A_1 \wedge x_1 = x_2 \in A_2$ כלומר, $x_1 \in A_1 \cap A_2$ וכיון ש־ $f(x_1) = y$ נקבל $y \in f[A_1 \cap A_2]$.
$\Rightarrow$: נתון השיוויון, צ"ל חח"ע. נב"ש ש־ f לא חח"ע. לכן יש $x_1 \neq x_2$ איברים של X כך ש־ $f(x_1) = f(x_2)$. כעת ניקח $A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}$ ואז

$$f[A_1\cap A_2] = f[\emptyset] = \emptyset \neq \{f(x_2)\} = \{f(x_1)\}\cap\{f(x_2)\} = f[A_1]\cap f[A_2]$$