מתמטיקה בדידה – תרגיל 10 – פיתרון

שאלה 1
יהיו α,β,γ קרדינלים. הוכיחו ישירות כי $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$. *[הדרכה: הניחו כי A,B,C קבוצות זרות מעוצמות α,β,γ בהתאמה והראו ישירות כי $|A\times(B\cup C)|=|A\times B\cup A\times C|$.]*

הוכחה
קיימות קבוצות A,B,C עם עוצמות α,β,γ בהתאמה. בה"כ A,B,C זרות (אם לא, נחליף אותן ב- $A\times\{1\},B\times\{2\},C\times\{3\}$). לפי הגדרת כפל וסכום עוצמות מתקיים
$|A\times(B\cup C)|=|A|\times|B\cup C|=\alpha(|B|+|C|)=\alpha(\beta+\gamma)$ ו-
$|A\times B\cup A\times C|=|A\times B|+|A\times C|=\alpha\beta+\alpha\gamma$ (שימו לב ש-$A\times B,A\times C$ זרות כי B,C זרות). לכן, כדי להוכיח $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ מספיק להראות ש-$A\times(B\cup C)\sim A\times B\cup A\times C$. אבל

$$A\times(B\cup C)=\{(a,x)|a\in A,x\in B\cup C\}=\{(a,x)|(a\in A\wedge x\in B)\vee(a\in A\wedge x\in C)\}=$$
$$\{(a,x)|a\in A,x\in B\}\cup\{(a,x)|a\in A,x\in C\}=A\times B\cup A\times C$$

ובפרט נובע ש- $A\times(B\cup C)\sim A\times B\cup A\times C$ (כי כל קבוצה שקולה לעצמה). **משל.**

שאלה 2
הוכיחו:

1. $\left|(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^{\mathbb{Z}}\right|=|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|$
2. $\left|\{0,1,2\}^{[0,1]\times\mathbb{N}}\right|=\left|P\big(P(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})\big)\right|$

הדרכה: השתמשו בחשבון עוצמות.

פיתרון
פיתרון 1: מתקיים $|\mathbb{Q}|=\aleph_0<\aleph=|\mathbb{R}|$ ולכן $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|=|\mathbb{R}|=\aleph$. [הסבר יותר מפורט: נסמן $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|=\beta$ ונניח בשלילה ש-$\aleph>\beta$. אז $\aleph=|\mathbb{R}|=|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|+|\mathbb{Q}|=\beta+\aleph_0=\max\{\beta,\aleph_0\}<\aleph$ וקיבלנו סתירה $\aleph<\aleph$. לכן, בהכרח $\aleph=\beta$.] כעת:

$$\left|(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^{\mathbb{Z}}\right|=|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|^{|\mathbb{Z}|}=\aleph^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph.$$

מצד שני: $|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|=\aleph\times\aleph=\aleph$ ולכן $\left|(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^{\mathbb{Z}}\right|=|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|$.

פיתרון 2: נשים לב ש-$|\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}|\le|\mathbb{Q}|=\aleph_0$ וגם מתקיים $\aleph_0\le|\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}|$ כי הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ המוגדרת ע"י $f(n)=n+\frac{1}{2}$ היא חח"ע (בדקו!). לכן, לפי קנטור ברנשטיין, $|\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}|=\aleph_0$. לפיכך:

$$\left|P\big(P(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})\big)\right|=2^{|P(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})|}=2^{2^{|\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}|}}=2^{2^{\aleph_0}}=2^{\aleph}.$$

מצד שני, $\left|\{0,1,2\}^{[0,1]\times\mathbb{N}}\right|=|\{0,1,2\}|^{|[0,1]|\times|\mathbb{N}|}=3^{\aleph\times\aleph_0}=3^{\aleph}=2^{\aleph}$ ולכן $\left|P\big(P(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})\big)\right|=2^{\aleph}=\left|\{0,1,2\}^{[0,1]\times\mathbb{N}}\right|$ כדרוש. (הערה: השוויון האדום נובע משאלה 3 סעיף 3 או, לחלופין, מכללי העוצמות שראינו בכיתה).

שאלה 3

תהי A קבוצה אינסופית.

1. הראו שקיימת פונקציה חד חד ערכית מ-A^A אל $P(A \times A)$. [רמז: פונקציה היא יחס.]
2. הראו כי לכל מונה אינסופי α מתקיים $\alpha^\alpha = 2^\alpha$.
3. הראו כי לכל שני מונים אינסופיים $\alpha \leq \beta$ מתקיים $\beta^\alpha = 2^\alpha$.

פיתרון

הוכחת 1: הקבוצה $P(A \times A)$ היא קבוצת כל היחסים על A. כל פונקציה מ-A לעצמה היא יחס על A ולכן $A^A \subseteq P(A \times A)$. נגדיר $f: A^A \to P(A \times A)$ ע"י $f(x) = x$. ברור כי f חח"ע ולכן גמרנו. **משל.**

הוכחת 2: יהי α מונה אינסופי ותהי A קבוצה כך ש-$\alpha = |A|$. לפי סעיף 1, $\alpha^\alpha = |A^A| \leq |P(A \times A)| = 2^{\alpha \cdot \alpha} = 2^\alpha$. מצד שני, $\alpha \geq 2$ ולכן $2^\alpha \leq \alpha^\alpha$ (לפי מונוטוניות החזקה). לכן, לפי קנטור ברנשטיין, $\alpha^\alpha = 2^\alpha$. **משל.**

הוכחת 3: יהי α מונה אינסופי ו-$2 \leq \beta \leq \alpha$. אזי לפי מונוטוניות החזקה $2^\alpha \leq \beta^\alpha \leq \alpha^\alpha$. לפי סעיף קודם $\alpha^\alpha = 2^\alpha$ ולכן $2^\alpha \leq \beta^\alpha \leq 2^\alpha$. כעת, לפי קנטור ברנשטיין, $\beta^\alpha = 2^\alpha$. **משל.**

שאלה 4

פשטו את הביטויים הבאים. ניתן להיעזר בשאלה 3. התשובות צריכות להיות ביטויים כגון $\aleph_0, \aleph, \Phi \coloneqq 2^\aleph, 2^\Phi, \ldots$.

1. $(\aleph_0 + \aleph)^{\aleph_0}$
2. $\aleph\left(5^\aleph + \aleph_0^{\aleph_0}\right)$
3. $(3^\aleph)^{3^{\aleph_0}} + \aleph^\aleph$
4. $\aleph \cdot \aleph_0^{(\aleph_0^\aleph + \aleph)}$

פיתרון

בפיתרון נשתמש בכללים הבאים עבור מונים α, β שלפחות אחד מהם אינסופי:

1. $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$
2. אם $\alpha, \beta > 0$ אז $\alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$
3. אם $1 < \beta \leq \alpha$ אז $\beta^\alpha = 2^\alpha$ (שאלה 3 סעיף 2).
4. $\aleph = 2^{\aleph_0}$
5. משפט קנטור
6. כללים של פעולות על עוצמות (לדוגמא, $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$).

פיתרון:

1. $(\aleph_0 + \aleph)^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$
2. $\aleph\left(5^\aleph + \aleph_0^{\aleph_0}\right) = \aleph(2^\aleph + 2^{\aleph_0}) = \aleph(2^\aleph + \aleph) = \aleph 2^\aleph = 2^\aleph = \Phi$
3. $(3^\aleph)^{3^{\aleph_0}} + \aleph^\aleph = (3^\aleph)^{2_0^\aleph} + 2^\aleph = (3^\aleph)^\aleph + \Phi = 3^{\aleph\aleph} + \Phi = 3^\aleph + \Phi = 2^\aleph + \Phi = \Phi$
4. $\aleph \cdot \aleph_0^{(\aleph_0^\aleph + \aleph)} = \aleph \cdot \aleph_0^{2^\aleph + \aleph} = \aleph \cdot \aleph_0^{2^\aleph} = \aleph \cdot 2^{2^\aleph} = 2^{2^\aleph} = 2^\Phi$

שאלה 5

חשבו את העוצמות של הקבוצות הבאות. התשובות צריכות להיות ביטויים כגון $\aleph_0, \aleph, \Phi \coloneqq 2^{\aleph}, 2^{\Phi}, \dots$. נמקו את תשובתכם.

1. קבוצת הפונקציות העולות ממש מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{N}$.
2. קבוצת כל הזוגות (A,B) כך ש-A קבוצה של מספרים שלמים זוגיים ו-B קבוצה של מספרים שלמים אי זוגיים.
3. קבוצת כל הפונקציות f מהמלבן $[0,2] \times [1,2]$ ל-$\mathbb{R}$ המקיימות $f(1,1) = \pi$.
4. תתי הקבוצות של $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ שמכילות את $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

פיתרון

פתרון 1: תהי A קבוצת הפונקציות העולות ממש מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{N}$. אזי $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ולכן $|A| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

<u>נוכיח ש-$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |A|$:</u> נגדיר פונקציה $F: A \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ על ידי $F(f) = D_f$ באשר $D_f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $D_f(n) = \begin{cases} f(n) - f(n-1) & n > 1 \\ f(1) & n = 1 \end{cases}$. האיבר $f(n) - f(n-1)$ הוא אכן מספר טבעי לכל $1 < n \in \mathbb{N}$ כי הפונקציה f עולה ממש ולכן $D_f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

מספיק להראות ש-F על. תהי $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. נגדיר $S_g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ע"י $S_g(n) = g(1) + g(2) + \dots + g(n)$. הפונקציה S_g ב-A כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$S_g(n) = g(1) + g(2) + \dots + g(n) < g(1) + g(2) + \dots + g(n) + g(n+1) = S_g(n+1)$$

כלומר S_g מונוטונית עולה ולכן ב-A. (אי השוויות האדום נובע מכך ש-$g(n+1)$ הוא מספר טבעי ולכן גדול מ-0). כעת, לכל $n > 1$ מתקיים:

$$F(S_g)(n) = D_{S_g}(n) = S_g(n) - S_g(n-1) =$$
$$= \left(g(1) + \dots + g(n-1) + g(n)\right) - \left(g(1) + \dots + g(n-1)\right) = g(n)$$

בנוסף, $F(S_g)(1) = D_{S_g}(1) = S_g(1) = g(1)$. לכן $F(S_g)(n) = g(n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$. כלומר, $F(S_g) = g$ ולכן ל-g יש מקור ב-A.

<u>חזרה לשאלה המקורית:</u> הראינו $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |A| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$ ולכן לפי קנטור ברנשטיין $|A| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$. לסיכום $|A| = \aleph$.

פתרון 2: תהי X קבוצת המספרים השלמים הזוגיים ותהי Y קבוצת המספרים השלמים האי זוגיים. אזי הקבוצה הנתונה בסעיף 2 היא $Z \coloneqq P(X) \times P(Y)$. כל אחת מהקבוצות X, Y היא אינסופית ובת מנייה ולכן $|X| = |Y| = \aleph_0$. לכן, $|Z| = |P(X) \times P(Y)| = |P(X)| \cdot |P(Y)| = 2^{|X|} \cdot 2^{|Y|} = 2^{|X|+|Y|} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$.

פתרון 3: תהי $A = \{f \in \mathbb{R}^{[1,2]\times[0,2]} \mid f(1,1) = \pi\}$. עלינו לחשב את $|A|$. מתקיים $A \subseteq \mathbb{R}^{[1,2]\times[0,2]}$ ולכן $|A| \leq |\mathbb{R}^{[1,2]\times[0,2]}| = |\mathbb{R}|^{|[1,2]|\times|[0,2]|} = \aleph^{\aleph+\aleph} = \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph} = \Phi$.

נגדיר פונקציה $F: A \to \mathbb{R}^{[1.5,2]\times[0,2]}$ ע"י $F(f) = f|_{[1.5,2]\times[0,2]}$. <u>נראה ש-$F$ על:</u> לכל $g \in \mathbb{R}^{[1.5,2]\times[0,2]}$ נגדיר $f_g: [1,2] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ ע"י: $f_g(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \in [1.5,2] \times [0,2] \\ \pi & otherwise \end{cases}$.
אזי $f_g(1,1) = \pi$ ולכן $f_g \in A$. מצד שני, לכל $(x,y) \in [1.5,2] \times [0,2]$ מתקיים $F(f_g)(x,y) = f_g|_{[1.5,2]\times[0,2]}(x,y) = f_g(x,y) = g(x,y)$. לכן, $F(f_g) = g$. כלומר ל-g יש מקור ב-A.

<u>חזרה לשאלה המקורית</u>: כעת נובע ש- $|A| \geq \left|\mathbb{R}^{[1.5,2]\times[0,2]}\right| = |\mathbb{R}|^{|[1.5,2]|\times|[0,2]|} = \aleph^{\aleph+\aleph} = \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph} = \Phi$. קיבלנו ש- $\Phi \leq |A| \leq \Phi$ ולכן לפי קנטור-ברנשטיין $|A| = \Phi$.

פתרון 4: תהי $A = \{X \subseteq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \mid \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \subseteq X\}$. צריך לחשב את $|A|$. נסמן $T = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ונגדיר $B = P(T)$.

<u>טענה:</u> $|A| = |B|$.

<u>הוכחה:</u> נגדיר $f: A \to B$ ע"י $f(X) = X \cap T \in B$.
נגדיר $g: B \to A$ ע"י $g(Y) = Y \cup (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \in A$.
נבדוק ש- $f \circ g = id_B$: תהי $Y \in B$. אזי:
$f\big(g(Y)\big) = \big(Y \cup (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\big) \cap T = (Y \cap T) \cup (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \cap T) = Y \cup \phi = Y$, כדרוש.
נבדוק ש- $g \circ f = id_A$: תהי $X \in A$. אזי: $g\big(f(X)\big) = (X \cap T) \cup (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) =$ $(X \cup \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \cap (T \cup \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = X \cap \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} = X$, כדרוש. (השתמשנו בכך ש- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \subseteq X \subseteq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$).
לכן, f הפיכה ונובע ש- $|A| = |B|$. <u>מש"ל טענה</u>

הקבוצה T היא תת קבוצה של $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ולכן $|T| \leq |\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. מצד שני, הפונקציה $f: \mathbb{N} \to T$ המוגדרת ע"י $f(n) = \left(n + \frac{1}{2}, n, n\right) \in T$ היא חח"ע (בדקו!) ולכן $|T| \geq |\mathbb{N}| = \aleph_0$. כעת, לפי קנטור ברנשטיין $|T| = \aleph_0$.

לפיכך, $|A| = |B| = |P(T)| = 2^{|T|} = 2^{\aleph_0} = \aleph$.