(א) תהא A קבוצה, ו R יחס שקילות עליה. נגדיר יחס S על R(כן, כן, גם R היא קבוצה) כך: לכל $(a,b),(a',b')\in R$

$$(a,b)\,S\,(a',b')\iff aRa'\wedge bRb'$$

הוכיחו S יחס שקילות.

פתרון:

- רפלקסיביות:יהא $(a,b)\in R$ צ"ל כי $(a,b)\,S\,(a,b)$. אכן, כיוון ש R רפלקסיבי מתקיים כי $aRa\wedge bRb$ ולכן לפי הגדרת S נקבל $(a,b)\,S\,(a,b)$ כגד
- סימטריות: נניח $(a,b)\,S\,(a',b')$ עבור $(a,b),(a',b')\in R$ צ"ל $(a',b')\,S\,(a,b)$. מההנחה $(a,b)\,S\,(a',b')$ נובע כי $aRa'\wedge bRb'$. כיוון ש R סימטרי נקבל כי $a'Ra\wedge b'Rb$ ולכן לפי הגדרת S נקבל $(a',b')\,S\,(a,b)$.
- טרנזיטיביות: נניח $(a,b)\,S\,(a',b'),(a',b')\,S\,(a",b")$ (צ"ל $(a,b)\,S\,(a",b")$) אזי $[aRa'\wedge bRb']\wedge[a'Ra"\wedge b'Rb"]$. כיוון ש R טרנזיטיבי נקבל כי $aRa"\wedge bRb"$ ולכן $(a,b)\,S\,(a",b")$ כנדרש.

(ב) נגדיר יחס שקילות R על $\mathbb{Q}^{\times}=\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ כך: לכל $x,y\in\mathbb{Q}^{\times}$

$$xRy\iff\exists z\in\mathbb{Q}^{\times}:xy=z^2$$

i. הוכיחו כי R טרנזיטיבי (אין צורך להוכיח רפלקסיביות וסימטריות)

פתרון: נניח כי $xRy\wedge yRz$ אזי קיימים $t,s\in\mathbb{Q}^{\times}$ כך ש $xy=t^2\wedge yz=s^2$ ולכן $xy^2z=t^2s^2$ ולכן $xz=\left(\frac{ts}{y}\right)^2$ כיוון ש $\frac{ts}{y}\in\mathbb{Q}^{\times}$ נקבל כי xRz כנדרש

ii. נגדיר יחס S על R כמו בסעיף הקודם. מצאו מפורשות את מחלקת השקילות של $\left[\left(1,\frac{1}{4}\right)\right]_S$ ותנו 2 איברים במחלקת שקילות זאת.

פתרון: נקבל לפי הגדרה כי

$$\left[\left(1,\frac{1}{4}\right)\right]_S=\left\{(a,b)\in R:\ 1Ra\wedge\frac{1}{4}Rb\right\}$$

כיוון ש R יחס שקילות אזי לכל b המקיים $1R\frac{1}{4}\wedge\frac{1}{4}Rb$ גם $1Rb$ ולכן

$$\left[\left(1,\frac{1}{4}\right)\right]_S=\left\{(a,b)\in R:\ 1Ra\wedge\frac{1}{4}Rb\right\}=\{(a,b)\in R:\ 1Ra\wedge 1Rb\}$$

נשים לב כי $1Ra$ פירושו $\exists z\in\mathbb{Q}^{\times}:a=z^2$ ולכן

$$\left[\left(1,\frac{1}{4}\right)\right]_S=\left\{\left(z^2,t^2\right)\mid z,t\in\mathbb{Q}^{\times}\right\}$$

שני איברים לדוגמא הם $(1,1),(4,16)$