.1

א. $$(1+i)^{2i} = e^{2i\log(1+i)} = e^{2i\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)} = e^{i\ln 2}e^{-\left(\frac{\pi}{2}+4\pi k\right)}$$

ב. $$(-i)^{-i} = e^{-i\left(\ln(1)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$$

ג.

$$\mathrm{Im}\left[(1-i)^{1+i}\right] = \mathrm{Im}\left[e^{(1+i)\left[\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right]}\right] = \mathrm{Im}\left[e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k+i\left[\ln\sqrt{2}+-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right]}\right] = e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k}\sin\left[\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$$

.2 ניקח $z=2\pi i, w=i$, ואז $(e^z)^w = 1 \neq e^{-2\pi} = e^{zw}$

3. נניח $\tan w = z$, כלומר

$$\frac{\sin w}{\cos w} = z$$

$$\frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = z$$

$$e^{iw} - e^{-iw} = ize^{iw} + ize^{-iw}$$

$$e^{2iw} - 1 = ize^{2iw} + iz$$

$$e^{2iw}(1 - iz) = iz + 1$$

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$2iw = \log\frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$w = \arctan z = \frac{1}{2i}\log\frac{1 + iz}{1 - iz}$$

4. נפצל את המסילה שלנו לשלושה חלקים

$$\gamma_1(t) = i(1-t), \quad \gamma_2(t) = t, \quad \gamma_3(t) = 1 + it$$

כאשר בכל חלק $0 \leq t \leq 1$. נחשב כל חלק של האיטנגרל

$$\int\limits_{\gamma_1} z\sin x \mathrm{d}z = \int\limits_0^1 i(1-t)\sin 0 \cdot (-i)\mathrm{d}t = 0$$

$$\int\limits_{\gamma_2} z\sin x \mathrm{d}z = \int\limits_0^1 t\sin t \cdot 1\mathrm{d}t = -t\cos t\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 \cos t\mathrm{d}t = -\cos 1 + \sin t\Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1$$

$$\int\limits_{\gamma_3} z\sin x \mathrm{d}z = \int\limits_0^1 (1 + it)\sin 1 \cdot i\mathrm{d}t = i\sin 1(t + \frac{i}{2}t^2)\Big|_0^1 = i\sin 1 - \frac{1}{2}\sin 1$$

נסכום הכל ונקבל

$$i\sin 1 + \frac{1}{2}\sin 1 - \cos 1$$

5. רואים מייד ש

$$\int\limits_{\gamma} \sin z \mathrm{d}z = -\cos z\Big|_{\gamma(-\pi)}^{\gamma(1)} = -\cos z\Big|_{-1}^{-1} = 0$$

למעשה, זה נובע מכך שהאינטגרל על מסילה סגורה (חלקה למקוטעין) של פונקציה אנליטית (לפחות בפנים המסילה) הוא 0.

לכן נותר לחשב את

$$\int\limits_{\gamma} \overline{z} \mathrm{d}z$$

נפצל אותו לפי שני הקטעים של המסילה ונקבל

$$\int\limits_{\gamma} \overline{z} \mathrm{d}z = \int\limits_{-\pi}^{0} e^{-it} e^{it} i \mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{1} (1-2t)(-2) \mathrm{d}t = it\Big|_{-\pi}^{0} + t - t^2\Big|_{0}^{1} = i\pi$$

6. ע"י הזהות $w^2+2w+4=\frac{w^3-8}{w-2}$ מקבלים שהאינטגרנד הוא $\bar{z}^2+2\bar{z}+4$. על הציר המדומה,

$\bar{z}=-z$ והאינטגרל שם הוא $i\ \ -1-\frac{11}{3}i=-\left(4i+1-\frac{i}{3}\right)=\left.4z-z^2+\frac{z^3}{3}\right|_i^0=\int_i^0\left(4-2z+z^2\right)dz$.

$$\int_i^0\left(4-2z+z^2\right)dz=\left.4z-z^2+\frac{z^3}{3}\right|_i^0=-\left(4i+1-\frac{i}{3}\right)=-1-\frac{11}{3}i\ .$$

על הקטע הממשי $\bar{z}=z$ והאינטגרל עליו הוא

$$\int_0^1\left(z^2+2z+4\right)dz=\left.\frac{z^3}{3}+z^2+4z\right|_0^1=\frac{1}{3}+1+4=\frac{16}{3}\ .$$

האינטגרל הכולל הוא הסכום של השניים: $\frac{13}{3}-\frac{11}{3}i$