89-198 מתמטיקה בדידה – תרגיל 3

<u>שאלה 1</u>: (16 נקודות) תהיינה A, B קבוצות. הוכח או הפרך:

1) $A \setminus B \subseteq \overline{B \setminus A}$
2) $A \triangle B \subseteq A \cup B$
3) $\bar{A} \setminus B = \overline{A \cup B}$
4) $P(A) \setminus P(B) = P(A \setminus B)$

<u>פתרון שאלה 1:</u>

1) נכון.

הוכחנו בתרגול ש $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ דה מורגן   משלים כפול   קומוטטיביות

תחילה נשים לב ש $\overline{B \setminus A} = \overline{B \cap \bar{A}} = \bar{B} \cup \bar{\bar{A}} = \bar{B} \cup A = A \cup \bar{B}$.

יהי x שרירותי ונניח ש $x \in A \setminus B$, מהגדרת הפרש $x \in A \wedge x \notin B$.

מכלל הפישוט נובע ש $x \in A$ ומכלל החיבור נובע $x \in A \vee x \notin B$, לכן $x \in A \cup \bar{B}$.

נובע מכך שלכל x מתקיים $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \cup \bar{B}$, ומכיון ש $\overline{B \setminus A} = \overline{A \cup \bar{B}}$ נקבל ש $A \setminus B \subseteq \overline{B \setminus A}$.

2) נכון.

יהי x שרירותי ונניח ש $x \in A \triangle B$, מהגדרת הפרש סימטרי $x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)$.

מכלל הפישוט נובע ש $x \in A \cup B$.

לכן $A \triangle B \subseteq A \cup B$.

3) נכון. $\bar{A} \setminus B = \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

$A \setminus B = A \cap \bar{B}$ דה מורגן

4) לא נכון. עבור $A = \{1\}, B = \{2\}$ נקבל

$P(A \setminus B) = P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$ אולם $P(A) \setminus P(B) = \{\emptyset, \{1\}\} \setminus \{\emptyset, \{2\}\} = \{\{1\}\}$.

באופן כללי, לכל A, B מתקיים $\emptyset \in P(A \setminus B)$ אולם $\emptyset \notin P(A) \setminus P(B)$.

<u>שאלה 2</u>: (32 נקודות) תהיינה A, B, C קבוצות. הוכח או הפרך:

1) $A \triangle (B \cup C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$
2) $A \cup (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
3) $A \cup (B \triangle C) \subseteq (A \cup B) \triangle (A \cup C)$
4) $A \cup (B \triangle C) \supseteq (A \cup B) \triangle (A \cup C)$

<u>פתרון שאלה 2:</u>

1) לא נכון. נראה דוגמה נגדית:

עבור $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2\}, C = \{1,3\}$, מתקיים $A \triangle (B \cup C) = \emptyset$, אך $(A \triangle B) \cup (A \triangle C) = \{2,3\}$.

2) לא נכון. נראה דוגמה נגדית:

עבור $A = \{1,2\}, B = \{1,3\}, C = \{1,4\}$, נקבל $A \cup (B \cap C) = \{1,2\}$, ו $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{2\}$.

3) לא נכון. עבור $A=\{1\},B=\{2\},C=\{3\}$ נקבל
$(A\cup B)\triangle(A\cup C)=\{1,2\}\triangle\{1,3\}=\{2,3\}$ אולם $A\cup(B\triangle C)=\{1\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\}$.

4) נכון. תחילה נפשט את אגף ימין

$$(A\cup B)\triangle(A\cup C)\overset{\text{הגדרת הפרש סימטרי}}{=}\big((A\cup B)\cup(A\cup C)\big)\setminus\big((A\cup B)\cap(A\cup C)\big)\overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=}$$

$$\big((A\cup B)\cup(A\cup C)\big)\setminus\big(A\cup(B\cap C)\big)\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}\Big(\big((A\cup B)\cup A\big)\cup C\Big)\setminus\big(A\cup(B\cap C)\big)\overset{\text{קומוטטיביות}}{=}$$

$$\Big(\big(A\cup(A\cup B)\big)\cup C\Big)\setminus\big(A\cup(B\cap C)\big)\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}\Big(\big((A\cup A)\cup B\big)\cup C\Big)\setminus\big(A\cup(B\cap C)\big)\overset{\text{אידמפוטנטיות}}{=}$$

$$\big((A\cup B)\cup C\big)\setminus\big(A\cup(B\cap C)\big)\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}\big(A\cup(B\cup C)\big)\setminus\big(A\cup(B\cap C)\big)\overset{A\setminus B=A\cap\bar{B}\ \text{הוכחנו בתרגול}}{=}$$

$$\big(A\cup(B\cup C)\big)\cap\overline{\big(A\cup(B\cap C)\big)}\overset{\text{דה מורגן}}{=}\big(A\cup(B\cup C)\big)\cap\big(\bar{A}\cap\overline{(B\cap C)}\big)\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}$$

$$\Big(\big(A\cup(B\cup C)\big)\cap\bar{A}\Big)\cap\overline{(B\cap C)}\overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=}\Big((A\cap\bar{A})\cup\big((B\cup C)\cap\bar{A}\big)\Big)\cap\overline{(B\cap C)}\overset{\text{תכונות משלים}}{=}$$

$$\Big(\emptyset\cup\big((B\cup C)\cap\bar{A}\big)\Big)\cap\overline{(B\cap C)}\overset{\text{חוק הזהות}}{=}\big((B\cup C)\cap\bar{A}\big)\cap\overline{(B\cap C)}\overset{\text{קומוטטיביות}}{=}\big(\bar{A}\cap(B\cup C)\big)\cap\overline{(B\cap C)}\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}$$

$$\bar{A}\cap\big((B\cup C)\cap\overline{(B\cap C)}\big)\overset{A\setminus B=A\cap\bar{B}}{=}\bar{A}\cap\big((B\cup C)\setminus(B\cap C)\big)\overset{\text{הגדרת הפרש סימטרי}}{=}\bar{A}\cap(B\triangle C)=$$

כעת יהי x שרירותי ונניח ש $x\in(A\cup B)\triangle(A\cup C)$.
נובע מכך ש $x\in\bar{A}\cap(B\triangle C)$, כלומר $x\in\bar{A}\wedge x\in(B\triangle C)$.
מחוק הפישוט נובע $x\in(B\triangle C)$, ומחוק החיבור נובע $x\in A\vee x\in(B\triangle C)$, כלומר $x\in A\cup(B\triangle C)$.
לכן $(A\cup B)\triangle(A\cup C)\subseteq A\cup(B\triangle C)$.

<u>שאלה 3</u>: (10 נקודות)

1) נניח ש $\mathcal{U}=\mathbb{N}$ ונגדיר את הקבוצות $A_1,A_2,A_3,\dots,A_n$ בצורה הבאה $A_i=\{x\mid x\leq i+2\}$.
למשל, $A_3=\{x\mid x\leq 5\}=\{0,1,2,3,4,5\}$. יהי $n\in\mathbb{N}$.
למה שווה $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$?
למה שווה $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$?

1) עבור $I=\{2,3,4\}$ נגדיר את הקבוצות $A_i=\{i,2i\},B_i=\{i,i+1\}$.
מהם אברי $\bigcap_{i\in I}(A_i\triangle B_i)$?
מהם אברי $(\bigcup_{i\in I}A_i)\cap(\bigcup_{i\in I}B_i)$?

<u>פתרון שאלה 3:</u>

1) מכיון שלכל $i\in[n]$ מתקיים $A_i\subseteq A_{i+1}$ נקבל ש $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\subseteq A_n$.
בנוסף תמיד מתקיים $A_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_i$, לכן $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_n=\{0,1\dots,n+2\}$.
מכיון ש $A_i\subseteq A_{i+1}$ נקבל ש $A_1\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ ותמיד מתקיים $\bigcap_{i=1}^{n}A_i\subseteq A_1$ לכן $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1=\{0,1,2,3\}$.

2) נשים לב ש $A_2=\{2,4\},A_3=\{3,6\},A_4=\{4,8\}$ ו $B_2=\{2,3\},B_3=\{3,4\},B_4=\{4,5\}$

$$\bigcap_{i\in I}(A_i\triangle B_i)=(A_2\triangle B_2)\cap(A_3\triangle B_3)\cap(A_4\triangle B_4)=\{3,4\}\cap\{4,6\}\cap\{5,8\}=\emptyset$$

$$(\bigcup_{i\in I}A_i)\cap(\bigcup_{i\in I}B_i)=(A_2\cup A_3\cup A_4)\cap(B_2\cup B_3\cup B_4)=\{2,3,4,6,8\}\cap\{2,3,4,5\}=\{2,3,4\}$$

<u>שאלה 4</u>: (12 נקודות)

1) עבור $A = \left\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \emptyset\right\}$, מהי $P(A)$?
2) מהי $P\left(P\left(P(\emptyset)\right)\right)$?
3) כמה אברים יש בקבוצה $P\left(P\left(P\left(P(\emptyset)\right)\right)\right)$?

<u>פתרון שאלה 4:</u>

1) $P\left(\left\{\{1, \{2\}\}, 3\right\}\right) = \left\{\emptyset, \left\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right\}, \{\emptyset\}, \left\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \emptyset\right\}\right\}$.
2) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}, P\left(P(\emptyset)\right) = P(\{\emptyset\}) = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}, P\left(P\left(P(\emptyset)\right)\right) = P\left(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right) = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right\}$.
3) לפי משפט אם $|A| = n$ אזי $|P(A)| = 2^n$.

$|P(\emptyset)| = 2^0 = 1, \left|P\left(P(\emptyset)\right)\right| = 2^1 = 2, \left|P\left(P\left(P(\emptyset)\right)\right)\right| = 2^2 = 4, \left|P\left(P\left(P\left(P(\emptyset)\right)\right)\right)\right| = 2^4 = 16$

<u>שאלה 5</u>: (30 נקודות) הוכח את הטענות הבאות. יש לכתוב את רעיון ההוכחה.

1) יהיו $a, b \in \mathbb{R}$. אם $a < b < 0$ אז $b^2 < a^2$.
2) תהיינה A, B, C, D קבוצות המקיימות $A \setminus B \subseteq C \cap D$ ויהי $x \in A$. אם $x \notin D$ אז $x \in B$.
3) יהיו $n, m, u, v, z \in \mathbb{N}$. אם $z \mid n$ וגם $z \mid m$, אז $z \mid (un + vm)$.

<u>פתרון שאלה 5:</u>

1) יהיו $a, b \in \mathbb{R}$. אם $a < b < 0$ אז $b^2 < a^2$.

<u>רעיון ההוכחה</u>:

נסמן "$a < b < 0$" ב $P(a, b)$, ו "$b^2 < a^2$" ב $Q(a, b)$, אנחנו נדרשים להוכיח $P(a, b) \Rightarrow Q(a, b)$.

נתונים	מטרה
$a, b \in \mathbb{R}$	$(a < b < 0) \Rightarrow (b^2 < a^2)$

בעזרת אסטרטגיה 1, נוסיף את $P(a, b)$ להנחות ונוכיח את $Q(a, b)$.

נתונים	מטרה
$a, b \in \mathbb{R}$ $a < b < 0$	$b^2 < a^2$

כעת, מכיון ש a, b שליליים כיוון אי השיוויון ישתנה כאשר נכפיל ב a או ב b.

נכפיל את שני האגפים של $a < b$ ב a ונקבל $a^2 > ab$.

נכפיל את שני האגפים של $a < b$ ב b ונקבל $ab > b^2$.

ונקבל $a^2 > ab > b^2$

<u>הוכחה</u>:

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, ונניח ש $a < b < 0$.

נכפיל את שני האגפים של $a < b$ ב $a < 0$ ונקבל $a^2 > ab$.

נכפיל את שני האגפים של $a < b$ ב $b < 0$ ונקבל $ab > b^2$.

נקבל $a^2 > ab > b^2$, ולכן $a^2 > b^2$.

2) תהיינה A,B,C,D קבוצות המקיימות $A \setminus B \subseteq C \cap D$ ויהי $x \in A$. אם $x \notin D$ אז $x \in B$.

<u>רעיון ההוכחה</u>:

נתונים	מטרה
$A \setminus B \subseteq C \cap D$ $x \in A$	$x \notin D \Rightarrow x \in B$

בעזרת אסטרטגיה 2, נוסיף את $x \notin B$ להנחות ונוכיח את $x \in D$.

נתונים	מטרה
$A \setminus B \subseteq C \cap D$ $x \in A$ $x \notin B$	$x \in D$

כעת, מכיון ש $x \in A$ ו $x \notin B$ נקבל ש $x \in A \setminus B$, ולכן $x \in C \cap D$. נובע מכך ש $x \in D$.

<u>הוכחה</u>:

תהיינה A,B,C,D קבוצות המקיימות $A \setminus B \subseteq C \cap D$ ויהי $x \in A$. נוכיח ש $x \notin D \Rightarrow x \in B$ ב contrapositive.

נניח ש $x \notin B$ ונוכיח $x \in D$.

מכיון ש $x \in A$ וגם $x \notin B$ נקבל ש $x \in A \setminus B$.

מכיון ש $A \setminus B \subseteq C \cap D$ ו $x \in A \setminus B$ נקבל ש $x \in C \cap D$, כלומר $x \in C \wedge x \in D$.

מחוק הפישוט נקבל $x \in D$.

לסיכום נקבל ש $x \notin D \Rightarrow x \in B$.

3) יהיו $n,m,u,v,z \in \mathbb{N}$. אם $z \mid n$ וגם $z \mid m$, אז $z \mid (un+vm)$.

<u>רעיון ההוכחה</u>:

נתונים	מטרה
$n,m,u,v,z \in \mathbb{N}$	$(z \mid n \wedge z \mid m) \Rightarrow \left(z \mid (un+vm)\right)$

בעזרת אסטרטגיה 1, נוסיף את $z \mid n \wedge z \mid m$ להנחות ונוכיח ש $z \mid (un+vm)$.

נתונים	מטרה
$n,m \in \mathbb{N}$ $z \mid n \wedge z \mid m$	$z \mid (un+vm)$

$z \mid n$ לכן קיים $a \in \mathbb{N}$ כך ש $n = az$.

$z \mid m$ לכן קיים $b \in \mathbb{N}$ כך ש $m = bz$.

כעת $un+vm = u(az)+v(bz) = (ua+vb)z$, ולכן $z \mid (un+vm)$.

<u>הוכחה</u>:

יהיו $n,m,u,v,z \in \mathbb{N}$. ונניח ש $z \mid n$ וגם $z \mid m$.

מכיון ש $z \mid n$ קיים $a \in \mathbb{N}$ כך ש $n = az$.

מכיון ש $z \mid m$ קיים $b \in \mathbb{N}$ כך ש $m = bz$.

כעת $un+vm = u(az)+v(bz) = (ua+vb)z$, ולכן $z \mid (un+vm)$.