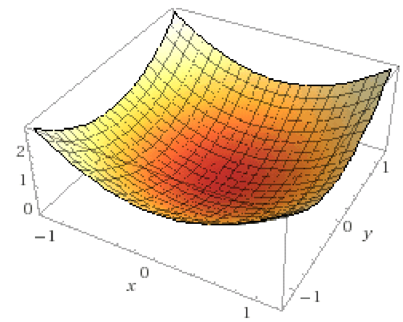
חשבון אינפיניטסימלי 3

מההרצאות של פרופ' מרק אגרנובבסקי
חשבון אינפיניטסימלי 3 88-230
סמסטר א' התשעד
הקליד וערך: בנימין לוין

הרצאה 1

דוגמא:

$$t = f(x, y, z)$$
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$
$$\Gamma_f = \{(x, y, z : z = f(x, y)\}$$



$$f(x_1, \dots, x_n) = \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\big)$$

פרק 1

מרחב $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

הגדרה

$\mathbb{R}^{n \in \mathbb{N}}$ הוא מרחב ליניארי מעל $\mathbb{R}$.

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$$
$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

תכונות

אסוציאטיביות $x + y = y + x$

קומוטטיביות $x + (y + z) = (x + y) + z$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$
$$(\lambda \mu)x = \lambda(\mu x)$$
$$\exists 0 = (0, \dots, 0)$$
$$x + 0 = 0 + x = x, -x = (-x_1, \dots, -x_n)$$

גאומטריה ב$\mathbb{R}^n$

מכפלה פנימית

$$\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}$$

1) $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

2) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

3) $\lambda\langle x,y\rangle = \langle \lambda x,\lambda y\rangle$

4) $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\langle x,x\rangle \geq 0$

מכפלה פנימית סטנדרטית ב$\mathbb{R}^n$

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

אי שוויון קושי

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n : \boxed{|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}}$$

יש שוויון אם"ם x,y ת"ל.

הוכחה

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \varphi(\lambda) \coloneqq \langle y-\lambda x, y-\lambda y\rangle = \langle y,y\rangle - 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle x,x\rangle \geq 0$$

$$\varphi(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$
$$\Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$$

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

זווית

$$x,y \in \mathbb{R}^n \setminus\{0\}$$

$-1 \leq \frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}} \leq 1$ לפי אי שוויון קושי

$$\exists \varphi \in [0,\pi] : cos\varphi = \frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}}$$
$$\varphi \coloneqq \widehat{\langle x,y\rangle}$$
$$\langle x,y\rangle = \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}cos\varphi$$

נורמה

$$||x||$$

מקיים:

1) $||x|| \geq 0$

$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = x$

2) $||ax|| = |a|||x||$

3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

נורמה אוקלידית

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$||x|| \coloneqq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

אי שוויון קושי

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||||y||$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

הוכחה

$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

נורמות ב$\mathbb{R}^n$

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$||x||_\infty \coloneqq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

l_p-נורמה

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad p \geq 1$$

$$||x||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

תרגיל בית

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_{p\to\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$$

משפט:

$||x||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ נורמה

הוכחה

$$||x||_p \geq 0$$

$$||x||_p \Leftrightarrow ||x||_p = 0$$

$$||\lambda x||_p = |\lambda|||x||_p$$

נשאר להוכיח אי שוויון המשולש:

אי שוויון משולש: אי שוויון של Minkowski

משפט (אי שוויון של Young)

$p,q \geq 1$ נקראים צמודים אם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

עבור p,q כאלה מתקיים:

$$\forall a,b>0 : ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

הוכחה

$\varphi(x)=e^x$ – קמורה (קעורה למעלה)

$$\varphi''(x)=e^x>0$$

אי שוויון ינסן:

$$\varphi(tx+(1-t)y) \leq t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$$
$$e^{tx+(1-t)y} \leq te^x+(1-t)e^y$$

$$\left\{t=\frac{1}{p},1-t=\frac{1}{q}\right\}$$

$$x=p\ln a\,, y=q\ln b$$

$$e^{\frac{1}{p}*pln(a)+\frac{1}{q}qln(b)} \leq \frac{1}{p}e^{pln(a)}+\frac{1}{q}e^{qln(b)}$$

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$$

משפט (אי שוויון של Holder)

$$x,y \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

אזי:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leq \left\|x\right\|_p\left\|y\right\|_q$$

הוכחה

אם $x=0 \vee y=0$ ברור, נניח שלא.

1) $\left\|x\right\|_p=\left\|y\right\|_q=1$ אזי

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|x_i|^p}{p}+\frac{|y_i|^p}{q}\right)=\frac{1}{p}\sum|x_i|^p+\frac{1}{q}\sum|y_i|^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

2) אחרת ננרמל את הווקטורים:

$$x' \coloneqq \frac{x}{\left\|x\right\|_p}, y'=\frac{y}{\left\|x\right\|_q}$$
$$\sum|x_i'y_i'| \leq 1$$

$$\sum \frac{|x_i||y_i|}{||x||_p ||y||_q} \le 1$$
$$\sum |x_i y_i| \le ||x||_p ||y||_q$$

הוכחה של אי שוויון מינקובסקי

$$||x+y||_p \le ||x||_p + ||y||_p$$

הוכחה

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

$$||x+y||_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum |x_i + y_i||x_i + y_i|^{p-1} \le \sum |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$$
$$\le \{Holder\} \le \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$||x+y||^p \le \left(||x||_p + ||y||_p\right)\left(\sum |x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

אבל

$$\left(\sum |x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} = ||x+y||_p^{p-1}$$

ולכן $||x+y||_p^p \le \left(||x||_p + ||y||_p\right) ||x+y||_p^{p-1}$

$$||x+y||_p \le ||x||_p + ||y||_p$$

טופולוגיה ב$\mathbb{R}^n$

מרחק

$||x||$ נורמה, אזי $\rho(x,y) := ||x-y||$ מטריקה

כדור

$$B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(a,x) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a|| < r\}$$

a מרכז, r רדיוס

הרצאה 2

כדורים

$a \in \mathbb{R}^n, r > 0$

כדור פתוח: $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a|| < r\}$

כדור סגור: $\bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a|| \le r\}$

ספרה: $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a|| = r\}$

הגדרה

יהי $|||\ \ |||$, $||\ \ ||$ נורמות, נאמר כי $||\ \ ||\sim|||\ \ |||$ (שקולות) אם קיים $k, K > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$k\,|||x||| \le ||x|| \le K\,|||x|||$$

הערה

$$|||x-a||| < \epsilon \Rightarrow ||x-a|| \le K\epsilon$$
$$x \in B_2(a,\epsilon) \Rightarrow x \in B_1(a,K\epsilon)$$

דוגמא

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \le \sqrt{n}\max|x_i| = \sqrt{n}||x||_\infty$$
$$||x||_\infty = \max|x_i| \le \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = ||x||_2$$
$$||x||_\infty \le ||x||_2 \le \sqrt{n}||x||_\infty, \quad k = 1, K = \sqrt{n}$$
$$||\ \ ||_2 \sim ||\ \ ||_\infty$$

משפט

כל שתי נורמות $|||\ \ |||, ||\ \ ||$ ב-$\mathbb{R}^n$ שקולות.

הגדרה

הקבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ תיקרא <u>חסומה</u> אם קיים $M \ge 0$ כך $\forall x \in A\ ||x|| \le M$

$A \subseteq \bar{B}(0,M)$

הגדרה

$U \subseteq \mathbb{R}^n$. $a \in U$ תיקרא נקודה פנימית אם $\exists \epsilon: B(a,\epsilon) \subset U$

$\mathring{U} = \{$כל נק' פנימית של U$\}$ - פנים ($\mathring{U} = intU$).

הגדרה

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ תקרא קבוצה פתוחה אם $\mathring{U} = U$

U פתוחה $\Leftrightarrow$ כל נקודה פנימית $a \in U$ היא פנימית.

דוגמא

$n = 1, U = (1,2)$

הגדרה
$B(a,\epsilon)$ תקרא ϵ-סביבה של a.
אם $U \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה כך ש-$a \in U$ אזי U סביבה של a.

הגדרה
$F \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת קבוצה סגורה אם $\mathbb{R}^n \setminus F$ היא קבוצה פתוחה.

דוגמא

$$[0,1] \in \mathbb{R}^2$$

תרגיל
$B(a,r)$ קבוצה פתוחה, $\bar{B}(a,r)$ קבוצה סגורה.

הוכחה

$$U = B(a,r)$$
$$\epsilon = r - ||x_0 - a|| > 0$$
$$x \in B(x_0,\epsilon) \Rightarrow ||x - x_0|| < \epsilon$$
$$||x - a|| = ||(x - x_0) + (x_0 - a)|| \leq ||x - x_0|| + ||x_0 - a|| < \epsilon + ||x_0 - a|| = r$$

כלומר $x \in B(a,r)$ ולכן $B(x_0,\epsilon) \subset B(a,r)$.

$\bar{B}(a,r)$ סגור אם"ם $\mathbb{R}^n - \bar{B}(a,r)$ פתוחה.

$$\mathbb{R}^n - \bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| > r\}$$
$$x_0 \in \mathbb{R}^n - \bar{B}(a,r)$$
$$0 < \epsilon < ||x_0 - a|| - r$$
$$B(x_0,\epsilon) \subset \mathbb{R}^n - \bar{B}(a,r)$$

אי שוויון משולש

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n : \big|||x|| - ||y||\big| \leq ||x - y|| \leq ||x|| + ||y||$$

הגדרה
$F \subseteq \mathbb{R}^n$. $p \in \mathbb{R}^n$ נקודת הצטברות אם $\forall\epsilon > 0 : B(p,\epsilon) \cap F \neq \phi$.

דוגמא

$$F = [0,1)$$

נקודות ההצטברות הם $[0,1]$.

הגדרה
תהי $F \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\bar{F} = \{\text{כל נקודות הצטברות של } F\}$$

$\bar{F}$-סגור של F.

$$F \subseteq \bar{F}$$

משפט
F-סגורה אם"ם $F = \bar{F}$

הוכחה

נניח ש-F סגורה.

$\mathbb{R}^n - F$ פתוחה.

$p \in \bar{F}$. נניח בשלילה כי $p \notin F$, אזי $p \in \mathbb{R}^n - F$ ולכן $\exists \epsilon > 0 : B(p, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n - F$

$B(p, \epsilon) \cap F = \phi$ ולכן $p \notin \bar{F}$ בסתירה וכלן $F = \bar{F}$.

הכיוון השני דומה.

הגדרה

אם הקבוצה $F \subseteq \mathbb{R}^n$ היא

1) F חסומה
2) F סגורה

אזי F קומפקטית.

דוגמא

1) $F = [1, \infty)$ לא חסומה ולכן לא קומפקט.
2) $F = (0,1)$ לא קומפקט.
3) $\mathrm{F} = [1,2] \cup [3,4]$ קומפקטי.

אלגברה ליניארית

$X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ תת מרחב ליניארי אם"ם:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha x + \beta y \in X_0$$

בסיס

$\{e_1, \dots, e_m\} \subset X_0$ קבוצה בלתי תלויה ליניארית ומקיימית $span\{e_1, \dots, e_m\} = \{\sum_{i=1}^{m} d_i e_i \; : \; d_i \in \mathbb{R}\} = X_0$

$$m = \dim X_0$$

מרחבים אפינים (מישוריים, affine spaces)

$$L = x_0 + X_0, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

אם $e_1, \dots, e_m$ בסיס ב-X_0 אזי $L = \{x = x_0 + \sum_{i=1}^{m} d_i e_i : d_i \in \mathbb{R}\}$

$dimL = 1$ ובדוגמא שלנו $L = \{x_0 + \lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$

$X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ תת מרחב ליניארי.

$$\mathbb{R}^n = X_0 \oplus X_0^{\perp}$$
$$\forall x \in X_0, y \in X_0^{\perp} : \langle x, y \rangle = 0 \; (x \perp y)$$

השלמה אורתוגונלית לבסיס

יהי $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ תת מרחב לינארי אזי $\mathbb{R}^n = X_0 \oplus X_0^{\perp}$ ויתקיים $\forall x \in X_0, y \in X_0^{\perp} : \langle x, y \rangle = 0$.

$dimX_0 = n - 1, dimX_0^{\perp} = 1$ קו ישר.

v בסיס ב-$X_0^{\perp}$.

$X_0^{\perp} = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$, $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v\rangle = 0\}$ כאשר $v = (A_1, \dots, A_n)$ כך ש $X_0 = \{A_1x_1 + \dots + A_nx_n = 0\}$.

באופן כללי $dimX_0 = m$

$$dimX_0 = m \Rightarrow dimX_0^{\perp} = n - m$$

$\{v_1, \dots, v_{n-m}\}$ בסיס ב-$X_0^{\perp}$.

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_1\rangle = \dots = \langle x, v_{n-m}\rangle = 0\}$$
$$v_j = (A_{1j}, \dots, A_{nj})$$
$$X_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} A_{ij}x_i = 0, j = 1, \dots, n-m\right\}$$

תת מרחב ליניארי X_0 $dimX_0 = m$

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \dots + A_{n1}x_n = 0 \\ \dots \dots \\ A_{1,(n-m)}x_1 + \dots + A_{n,(n-m)}x_n = 0 \end{cases}$$

$n - m$ משוואות ליניאריות $rank(A_{ij})_{i,j=1}^{\mathrm{n,n-m}} = n - m$

מישור אפיני על Hyperplane

$$dimL = n - 1$$
$$L = a + X_0, dimX_0 = n - 1$$
$$x \in L \Leftrightarrow x = a + u, u \in X_0 \Leftrightarrow x - a = u \in X_0$$
$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : x - a \in X_0\}$$
$$\langle x - a, v\rangle = 0, v \in X_0^{\perp}$$

$$\boxed{A_1x_1 + \dots + A_nx_n = C}$$

עבור $C = A_1a_1 + .. + A_na_n$ $a = (a_1, \dots, a_n)$

מקרה כללי

$$dimL = m$$
$$L: \begin{cases} A_{11}(x_1 - a_1) + \dots + A_{n1}(x_n - a_n) = 0 \\ \dots \dots \\ A_{1,(n-m)}(x_1 - a_1) + \dots + A_{n,(n-m)}(x_n - a_n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \dots + A_{n1}x_n = C_1 \\ \dots \dots \\ A_{1,(n-m)}x_1 + \dots + A_{n,(n-m)}x_n = C_n \end{cases}$$

קו ישר ב-$\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{L} = a + X_0$$
$$\dim X_0 = 1$$

$e \in X_0. e \neq 0$
$L = \{x = a + \lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$
$x - a = \lambda e$

$$x_1 - a_1 = \lambda e_1$$
$$- - - - - - -$$
$$x_n - a_n = \lambda e_n$$

$$\lambda = \frac{x_{\mathrm{j}} - a_{\mathrm{j}}}{e_{\mathrm{j}}}$$

הרצאה 3 – פרק 2

גבול של סדרה

$$\{x^m\}_{m=1}^{\infty}, x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m)$$
$$x_m = (x_{m1}, \dots, x_{mn})$$

הגדרה

תהי $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ $x^m \in \mathbb{R}^n$. L גבול של הסדרה אם $\lim_{m\to\infty} ||x^m - L|| = 0$.

לא תלוי בבחירה של נורמה מכיוון שאם $||\ \ ||, \left|\left|\ \ \right|\right|$ נורמות ב־$\mathbb{R}^n$ אזי $k\left|\left||x|\right|\right| \le ||x|| \le k\left|\left||x|\right|\right|$

ולכן $k\left|\left||x^m - L|\right|\right| \le ||x^m - L|| \le K\left|\left||x^m - L|\right|\right|$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty} ||x^m - L|| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\left||x^m - L|\right|\right| = 0$$

$$L \coloneqq \lim_{m\to\infty} x^m \qquad x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} L$$

$$\boxed{L = \lim_{m\to\infty} x^m \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists \bar{m} \forall m \ge \bar{m} : ||x^m - L|| < \epsilon}$$

משפט

$$\{x^m\}_{m=1}^{\infty}, x^m \in \mathbb{R}^n$$

$$x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} L \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, n : x_j^m \xrightarrow[m\to\infty]{} L_j$$

הוכחה

ניקח $||x||_1$.

בכיוון הראשון

$$||x^m - L||_1 = |x_1^m - L_1| + \dots + |x_n^m - L_n|$$
$$\forall j : \ 0 < |x_j^m - L_j| \le ||x^m - L_j||_1 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

ולכן לפי הלמה של הסנדוויץ' $\forall j : \ x_j^m \to L_j$

בכיוון השני, אם $\forall j \ |x_j^m - L_j| \to 0$ אזי

$$||x^m - L||_1 = |x_1^m - L_1| + \dots + |x_n^m - L_n| \to 0$$

ולכן $\lim_{m\to\infty} x^m = L$

תכונות

תהיו $\{y^m\}_{m=1}^{\infty}, \{x^m\}_{m=1}^{\infty}$, $\lim_{m\to\infty} y^m = M$, $\lim_{m\to\infty} x^m = L$ ∃, אזי

1) $\exists \lim_{m\to\infty} (\alpha x^m + \beta y^m) = \alpha L + \beta M$
2) $\exists lim_{m\to\infty} \langle x^m, y^m \rangle = \langle L, M \rangle$
3) $\lim_{m\to\infty} \|x^m\| = \|L\|$

הוכחות

1) לפי קורדינטות.
2) $\lim_{m\to\infty} \langle x^m, y^m \rangle = \lim_{m\to\infty} \sum x_i^m y_i^m = \langle L, M \rangle$
3) $\left| \|x^m\| - \|L\| \right| \le \|x^m - L\|$

$$\|x^m - L\| \to 0 \Rightarrow \|x^m\| \to \|L\|$$

תתי סדרה

$$\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$$
$$\mathbb{N} \ni j \to m_j \in \mathbb{N}$$
$$j < s \Rightarrow m_j < m_s$$
$$\{x^{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$$

משפט

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה

$$x^m \to L$$
$$\epsilon = 1\ \exists \bar{m} \forall m \ge \bar{m} : \|x^m - L\| < 1$$
$$M := \max\left\{\|x^1\|, \dots, \|x^{\bar{m}-1}\|, \|L\| + 1\right\}$$
$$\|x^m\| = \|L + (x^m - L)\| \le \|L\| + 1$$
$$m \ge \bar{m} \quad \|x^m\| \le M$$
$$m \le \bar{m} - 1 \quad \|x^m\| \le M$$

למה Balzano Weirtrass

אם $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ חסומה אז קיימת תת סדרה $\{x^{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ המתכנסת.

הוכחה

$$\forall m \in \mathbb{N} : \|x^n\| < C$$
$$\|x^m\|_\infty = \max\{|x_1^m|, \dots, |x_n^m|\}$$
$$\forall j\ |x_j^m| \le C$$

נתחיל עם $\{x_1^m\}_{m=1}^{\infty}$ חסומה, ולכן קיימת $\left\{x_1^{m_{j_1}}\right\}_{j_1=1}^{\infty}$ המתכנסת.

נתבונן בסדרה $\left\{x_2^{m_{j_1}}\right\}_{j_1=1}^{\infty}$ חסומה ולכן קיימת $\left\{x_2^{m_{j_{1}j_2}}\right\}_{j_2=1}^{\infty}$ המתכנסת, נמשיך כך עם כל הקורדינטות.

בסוף: $\left\{x_n^{m_{j_1 \dots j_n}}\right\}_{j_n=1}^{\infty}$ תת סדרה של $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ המתכנסת.

פונקציות

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$$

$m = 1$ נאמר כי f סקלית

$m > 1$ נאמר כי f וקטור-פונקציה.

Ω – תחום הגדרה, $\Omega = Dom(f)$

גרף

$$f: \overset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\Omega} \to \mathbb{R}^m$$

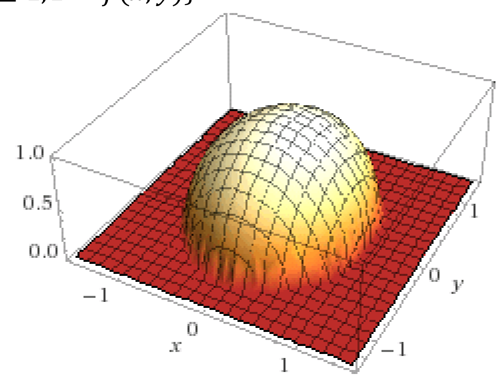
$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

$$Graph(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m} : x_{n+1} = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x_{n+m} = f_m(x_1, \dots, x_n)\}$$

דוגמאות

1) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

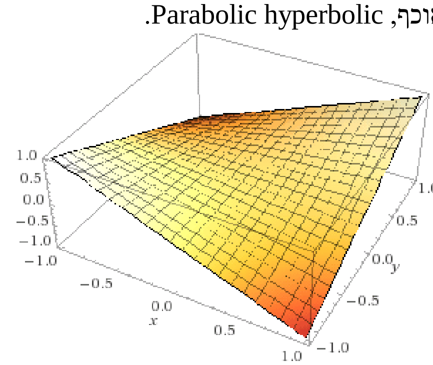
$$Dom(f) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$$
$$\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, z = f(x,y)\}$$



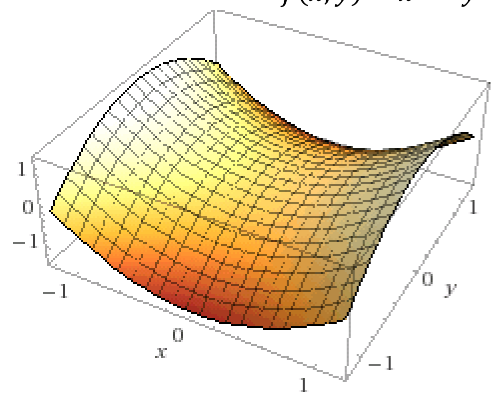
2) $f(x,y) = xy$

$$Dom(f) = \mathbb{R}^2, \qquad \Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$$

אוכף, Parabolic hyperbolic.



$f(x,y) = x^2 - y^2$ (3



נשים לב כי $z = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = \{u = x-y, v = x+y\} = uv$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

כלומר הפונקציה xy היא העצם הפונקציה שלנו עם סיבוב ב$-\frac{\pi}{4}$ ועם מתיחה $\sqrt{2}$.

גבול של פונקציה

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n$$

הגדרה

p-נקודת גבול, $p \in Lim\Omega$ אם:

$$\forall \epsilon > 0 \exists x \in \Omega, x \neq p : \left\|x - p\right\| < \epsilon$$
$$\forall \epsilon > 0 \ (B(p,\epsilon) - \{p\}) \cap \Omega \neq \phi$$

הגדרה

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^n, p \in Lim\Omega$$

אומרים שווקטור $L \in \mathbb{R}^n$ הוא גבול של f בנקודה p אם מתקיים:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega : \ x \neq p \wedge \left\|x - p\right\| < \delta \Rightarrow \left\|f(x) - L\right\| < \epsilon$$

$$L = \lim_{x \to p} f(x) \qquad f(x) \xrightarrow[x \to p]{} L$$

גאומטרי

$$L = \lim_{x \to p} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B(p,\delta) - \{p\}) \subset B(L,\epsilon)$$

הרצאה 4

גבול לפי Heine

הגדרה

$$f:\Omega \to \mathbb{R}^m$$
$$p \in Lim\Omega$$
$$L := (H)\lim_{x\to p} f(x) \Leftrightarrow \forall \{x^k\}_{k=1}^{\infty}, x^k \in \Omega, x^k \neq p : \lim_{k\to\infty} x^k = p \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x^k) = L$$

משפט

$$L = \lim_{x\to p} f(x) \Leftrightarrow L = (H)\lim_{x\to p} f(x)$$

הוכחה

נניח כי $L = \lim_{x\to p} f(x)$

ניקח כל סדרה $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}, x^k \in \Omega, x^k \neq p, \lim_{k\to\infty} x^k = p$. נקבע $\epsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in \Omega, 0 < \left\|x - p\right\| < \delta \Rightarrow \left\|f(x) - L\right\| < \epsilon$$
$$\exists \bar{k} \forall k \geq \bar{k} : \left\|x^k - p\right\| < \delta$$

בנוסף מתקיים $x^k \neq p$, ולפי בחירה של δ מתקיים $\left\|f(x^k) - L\right\| < \epsilon$ מתקיים לכל $k \geq \bar{k}$ ולכן לפי הגדרה של גבול $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = L$

נניח כי $L = (H)\lim_{x\to p} f(x)$

נניח $\neg \lim_{x\to p} f(x) = L$

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta, x \in \Omega, x \neq p \wedge \left\|f(x) - p\right\| \geq \epsilon$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : \delta = \delta_k = \frac{1}{k}$$
$$x_{\delta_k} := x^k$$
$$x^k \in \Omega, x^k \neq p$$
$$\left\|x^k - p\right\| < \delta_k = \frac{1}{k}$$
$$\left\|f(x^k) - L\right\| \geq \epsilon$$
$$\lim_{k\to\infty} \left\|x^k - p\right\| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x^k = p \Rightarrow \left\|f(x^k) - L\right\| \geq \epsilon \Rightarrow \neg(H)\lim_{k\to\infty} f(x^k)$$

תכונות של גבול של פונקציה

$$\lim_{x\to p} f(x) = L, \lim_{x\to p} g(x) = M$$

$$p \in Lim\Omega, f, g: \Omega \to \mathbb{R}^m$$

1) $\exists \lim_{x\to p} \alpha f + \beta g = \alpha L + \beta M$

2) $\exists \lim_{x\to p} \langle f(x), g(x)\rangle = \langle L, M\rangle$

3) $m = 1, M \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

4) $\lim_{x\to p} \|f(x)\| = \|L\|$

למה

$$\|f(x)\| \leq \alpha(x)$$
$$\lim_{x\to p} \alpha(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) = 0$$

גבול של פונקציית הרכבה

Superposition

$$\Omega_1 \in \mathbb{R}^n, \Omega_2 \in \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l$$
$$f: \Omega_1 \to \Omega_2$$
$$g: \Omega_2 \to \mathbb{R}^l$$

$$\forall x \in \Omega_1 \ : H \coloneqq g(f(x)$$
$$h = g \circ f$$

דוגמא

$$h(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$
$$g(u) = \sin(u)$$

$$h = g \circ f$$

משפט

תהי $\Omega_1 \in \mathbb{R}^n, \Omega_2 \in \mathbb{R}^m$

$$f: \Omega_1 \to \Omega_2$$
$$g; \Omega_2 \to \mathbb{R}^l$$
$$h = g \circ f$$

נניח כי

1) $\lim_{x\to p} f(x) = q \qquad p \in Lim\Omega_1$

2) $\lim_{x\to q} g(x) = L \qquad q \in Lim\Omega_1$

3) $\exists \epsilon_0 > 0 \forall x \in \Omega_1, x \in B(p, \epsilon_0)$
$x \neq p \Rightarrow f(x) \neq q$

אזי מתקיים

$$\exists \lim_{x\to p} h(x) = L$$

הוכחה

נניח כי $L = (H)\lim_{x\to p} h(x)$

ניקח $\lim_{k\to\infty} x^k = p$,$\{x^k\}_{k=1}^{\infty}, x^k \in \Omega, x^k \neq p$.

$\lim_{x\to p} f(x) = q$ ולכן $f(x^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} q$.$y_k \coloneqq f(x^k)$ לפי (3) $f(x^k) \neq q, x^k \in B(q,\epsilon_0)$

$$y_k \neq q, y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} q$$

$$L = \lim_{y\to q} g(y) \Rightarrow g(y^k) \to L$$

מה זה $g(y^k)$?

$$g(y^k) = g\big(f(x_k)\big) = h(x_k)$$

ולכן

$$\forall x^k \in \Omega_1, x^k \neq p, x^k \to p : h(x^k) \to L$$

כלומר $L = (H)\lim_{x\to p} f(x)$

דוגמא

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = x^2+y^2, g(u) = \frac{\sin(u)}{u}$$

$$p = (0,0), q = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f = q = 0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

$$h = g \circ f$$

$$\lim_{x\to p} h(x) = 1$$

גבול של צמצום

$$f:\Omega \to \mathbb{R}^m$$

$$\Omega_0 \subseteq \Omega$$

$$f|_{\Omega_0}(x) = f(x), x \in \Omega_0$$

משפט

תני $\Omega_0 \subseteq \Omega$

$$p \in Lim\Omega_0 \subseteq lim\Omega$$

אם $\lim_{\substack{x\to p\\ x\in\Omega}} f(x) = L$ אזי גם קיים הגבול $\lim_{\substack{x\to p\\ x\in\Omega_0}} f|_{\Omega_0}(x) = L$

הוכחה

נקבע $\epsilon > 0$

$$\exists\delta\forall x \in \Omega \ : 0 < \left||x-p|\right| < \delta \Rightarrow \left||f(x)-L|\right| < \epsilon$$

$$\forall x \in \Omega_0 : \ 0 < \left||x-p|\right| < \delta \Rightarrow \left||f(x)-L|\right| < \epsilon$$

תוכנית

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in\Omega}} f(x)$$

1) $p \in Lim\Omega_0, \Omega_0 \subseteq \Omega$

$$\nexists \lim_{x\to p} f|_{\Omega_0}(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to p} f(x)$$

אחרת

2) $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$

$$\lim_{x\to p} f|_{\Omega_1}(x) \neq \lim_{x\to p} f|_{\Omega_2}(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to p} f(x)$$

אחרת

3) $L = \lim_{x\to p} f|_{\Omega_0}$ מועמד לגבול.

דוגמא

1) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$$\Omega_1 \coloneqq \{(x,o) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$\Omega_2 \coloneqq \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$f(x,0) = f(0,y) = 0$$

אבל

$$\Omega_3 = \{(x,x): x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$f(x,x) = \frac{1}{2}$$

ולכן אין גבול.

2) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$

$$p = (0,0), e = (e_1, e_2)$$

צמצום של f אל קו ישר $(x,y) = t(e_1, e_2)$

$$f(te_1, te_2) = \frac{t^2e_1^2te_2}{t^4e_1^4 + t^2e_2^2} = \frac{te_1^2e_2}{t^2e_1^4 + e_2^2}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{te_1^2e_2}{t^2e_1^4 + e_2^2} = 0 \qquad e_2 \neq 0$$
$$f(te_1, 0) = 0 \qquad e_2 = 0$$
$$\lim_{t\to 0} f(te_1, 0) = 0$$

ניקח $\Omega_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq 0, y = x^2\}$

$$f(x,x^2) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x^2) = \frac{1}{2}$$

ולכן אין גבול.

גבול מחוזרר Iterated limit

$n = 2$

$f(x,y) \qquad (x,y) \to (x_0,y_0)$

גבול מחוזרר:

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

דוגמאות

1)

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0$$

$$(x_0,y_0) = (0,0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -1 \Rightarrow \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = -1$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = 1$$

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ ?$$

$$f(x,0) = 1, f(0,y) = -1 \Rightarrow \lim f(x,0) = 1 \neq -1 = \lim f(0,y)$$

ולכן אין גבול

הגבולות המחוזררים שונים ואין גבול לפונקציה עצמה.

2) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

$$f(x,0) = 0 = f(0,y)$$

$$f(x,x) = 1$$

כלומר אין גבול

הרצאה 5

דוגמא

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\qquad x,y\neq 0$$

נקבע $y\neq 0$

$$\nexists\lim_{x\to 0}\left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right)$$

ולכן אין גבול מחוזרר, אבל יש קיים גבול! $0\le |f(x,y)|\le x^2+y^2\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$

משפט

נניח שקיים

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

אם קיים

$$(\forall x:0<|x-x_0|<\delta)\ \lim_{y\to y_0} f(x,y)\coloneqq\varphi(x)$$

אז

$$\exists\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=L$$

הוכחה

נקבע $\epsilon>0$.

$$\exists\delta>0:|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta,(x,y)\neq(x_0,y_0)$$

אז $|f(x,y)-L|<\frac{\epsilon}{2}$

$$y\to y_0\Rightarrow|\varphi(x)-L|\le\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$$
$$0<|x-x_0|<\delta$$

ואז לפי הגדרה של גבול $\exists\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=L$

מבחן קושי של קיום גבול

משפט

$$f:\Omega\to\mathbb{R}^m$$
$$\Omega\subseteq\mathbb{R}^n,p\in Lim\Omega$$

אזי:

$$\exists\lim_{x\to p}f(x)=L\in\mathbb{R}^m\Leftrightarrow$$
$$\forall\epsilon>0\exists\delta>0:\forall x,x'\in\Omega,0<\left\||x-p|\right\|<\delta,0<\left\||x'-p|\right\|<\delta:\left\||f(x)-f(x')|\right\|<\epsilon$$

קואורדינטות קוטביות (פולריות)

$$n = 2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|x, y\|_2$$

$$\varphi = \tan\frac{x}{r} = \arctan\frac{y}{x}$$

$$x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$$

דוגמאות

1) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (x, y) \neq (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = ?$$

$$|xy| \le \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$|f(x, y)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \le \frac{1}{2}\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \to 0$$

ולכן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$$

דרך נוספת:

$$x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$$

$$|f(x, y)| = \left|\frac{rcos\varphi\ rsin\varphi}{r}\right| \le r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$$

2) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$$f(rcos\varphi, rsin\varphi) = \frac{r^2 cos\varphi\ sin\varphi}{r^2} = \cos\varphi \sin\varphi$$

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi$$

תלוי ב-φ, לא מתכנס.

תרגילים

1) $f(x, y) = \left(\sqrt{1 - x^2}, \ln(x^2 - y^2), \sin x \sin y\right)$

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^3$$

$$\Omega = \{x, y \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|, |x| \le 1\}$$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2+x-y}{1+2x^2+3y^2} = \frac{2-1}{1+3} = \frac{1}{4}$

3) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(\frac{x-1}{y-1}, \frac{x^2+x-2}{x-1}\right) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(\frac{x-1}{y-1}, \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}\right) = (0,3)$

4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

5) $f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \quad (x, y) \neq 0$

$$|f(x, y)| = \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \le \frac{3x^2|y|}{x^2} = 3|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| \le \frac{3r^3|\sin\varphi||\cos\varphi|}{r^2} \le 3r \to 0$$

6) $f(x, y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} \le |x|+|y| \to 0$$

7) $f(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

$$f(\lambda e_1, \lambda e_2) = \frac{\lambda(e_1-e_2)}{\lambda^{2\alpha}(e_1^2+e_2^2)^\alpha} = \lambda^{1-2\alpha}\frac{e_1-e_2}{(e_1^2+e_2^2)^\alpha} \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0 \Leftrightarrow 1-2\alpha > 0$$

לכן $\exists lim f = L$ אזי $1-2\alpha > 0$ כלומר $\alpha < \frac{1}{2}$. אם הגבול קיים אז $L = 0$

נניח כי $\alpha < \frac{1}{2}$: $|f(x,y)| = \left|\frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha}\right| \le \frac{|x|+|y|}{(x^2+y^2)^\alpha} \le \frac{\sqrt{2}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha} = \sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\alpha} \to 0$

כלומר גבול קיים אם"ם $\alpha < \frac{1}{2}$

תזכורת

$$a,b > 0 : a+b \le \sqrt{2}(a^2+b^2)$$
$$a+b = 1a+1b = |\langle(1,1),(a,b)\rangle| \le \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

8) $f(x,y) = \frac{x^\alpha y^4}{x^2+y^2}, \quad \alpha > 0, (x,y) \ne 0$

$$|f(x,y)| \le \left|\frac{x^\alpha y^4}{y^4}\right| \le |x|^\alpha \to 0$$

פונקציות רציפות ב $\mathbb{R}^n$

הגדרה

$$\Omega \in \mathbb{R}^n, p \in \Omega$$
$$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$$

אומרים ש f רציפה בנקודה p אם מתקיים התנאי :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \ x \in \Omega \ \|x-p\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(p)\| < \epsilon$$

משפט

אם $p \in \Omega$ אבל $p \notin Lim\Omega$ (מבודדת) אז f תמיד רציפה.

אם $p \in Lim\Omega \cap \Omega$ אז f רציפה בנקודה p אם"ם $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$

תכונות

אם f,g רציפה בנקודה p אזי

1) $\alpha f + \beta g$ רציפות ב-p
2) $\langle f(x), g(x)\rangle$ רציפה בp
3) אם $m=1, g(p) \ne 0$ אזי $\frac{f(x)}{g(x)}$ רציפה
4) $\|f(x)\|$ רציפה

משפט

יהי $\Omega_1 \in \mathbb{R}^n, \Omega_2 \in \mathbb{R}^m$.

$$f : \Omega_1 \to \Omega_2, \quad f : \Omega_2 \to \mathbb{R}^l$$
$$h \coloneqq g \circ f$$

אם f רציפה ב$p \in \mathbb{R}$, $q = f(p) \in \Omega_2$ אזי h רציפה בp.

דוגמא

רציפות לפי כל משתנה

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

$$f\left(x_1^o, \dots, x_{j-1}^o, x_j, \dots, x_n^o\right) \nRightarrow f \text{ רציפה}$$

לדוגמא $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$ כלומר לא רציף ב$(0,0)$

אבל f כן רציפה לגבי x, y בנפרד.

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{x_0 y}{x_0^2 + y^2} & x_0^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x_0 = y = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y \to 0} f(x_0, y) = 0$$

ולכן $\forall x_0$ f רציפה לגבי y.

כנ"ל f רציפה לגבי x.

משפט של $Weierstrass$ על min, max

תהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה סגורה וחסומה (קומפקטית).

תהי $f : k \to \mathbb{R}$ ונניח שf רציפה על K, אזי

1) f חסומה בקטע
2) קיימות נקודות $x_{min}, x_{max} \in K$ כך ש

$$f(x_{\max}) = \sup_{x \in K} f(x) = \max_{x \in K} f(x)$$
$$f(x_{min}) = \inf_{x \in K} f(x) = \min_{x \in K} f(x)$$

הרצאה 6

הוכחה למשפט של ווירשטרס

1) נניח כי f לא חסומה

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \exists x_m \in K : \left\| f(x_m) \right\| \geq m$$

K חסומה וסגורה $\Leftrightarrow$ K קומפקט

$K \supset \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ – חסומה ולכן $\exists C \geq 0 : \left\| x_m \right\| \leq C$

לפי למה Belzana-Weierstrass קיימת תת סדרה $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת $x_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, K סגורה ו$x_0$ נקודת הסתברות ולכן $x_0 \in K$. f רציפה ב-K ולכן בx_0 ולכן $f(x_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$ אז $\left\| f(x_{m_k}) \right\| \to \left\| f(x_0) \right\|$ אבל $\left\| f(x_{m_k}) \right\| > m_k \to \infty$ ואז $|f(x_0)| = \infty$ בסתירה.

2) $M \coloneqq \sup_{x \in K} f(x), \quad m \coloneqq \inf_{x \in K} f(x), \quad m, M \in \mathbb{R}$

נניח כי f לא מקבלת ערך M, כלומר $\forall x \in K : f(x) \neq M, f(x) < M$.

נגדיר $m - f(x) \geq$ $\quad g(x) \coloneqq \frac{1}{M - f(x)}$

ולכן g רציפה על K, לפי 1) g חסומה:

$$\exists C > 0 : g(x) \leq C\ \forall x \in K$$
$$\frac{1}{M - f(x)} \leq C$$
$$\frac{1}{C} \leq M - f(x)$$
$$f(x) \leq M - \frac{1}{C}$$

אבל $M - \frac{1}{C} < M$ – סתירה עם $M = \sup f(x)$

מסקנה

כל נורמות ב$\mathbb{R}^n$ שקולות.

בהוכחה שהופיע בהרצאה היית מעגל לוגי, פה מופיע ההוכחה שהמרצה הביא בהרצאה הבאה.

הוכחה

$$\left\| \| \quad \| \right\|, \| \quad \| \Rightarrow \| \quad \| \sim \left\| \| \quad \| \right\|$$

נראה כי כל נורמה שקולה ל$\|\quad\|_2$, ולכן כל זוג נורמות שקולות.

יהי $\|\quad\|$ נורמה ב$\mathbb{R}^n$, צ"ל $\|\quad\|_2 \sim \|\quad\|$, כלומר $\exists m, M > 0 : m\|x\|_2 \leq \|x\| \leq M\|x\|_2$

$$K \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1 \right\}$$

$$\varphi(x) \coloneqq \|x\|$$

$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

$$\|x\| = \|x_1e_1 + \cdots + x_1e_1\| \le |x_1|\|e_1\| + \cdots + |x_n|\|e_n\| \le \sqrt{\|e_1\| + \cdots \|e_n\|}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = C\|x\|_2$$

$$\|x^k - x^0\|_2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,, x^k \xrightarrow[\|\ \|_2]{} x^0$$

$$\big|\|x^k\| - \|x^0\|\big| \le \|x^k - x^0\| \le C\,\|x^k - x^0\|$$

$$x^k \xrightarrow[\|\ \|_2]{} x^0 \Rightarrow \varphi(x^k) \to \varphi(x^0)$$

לפי משפט W. $\exists x_{max}, x_{min} \in K = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\right\}$

$$\sup_{x\in K} \varphi(x) = \varphi(x_{max}) = M$$

$$\inf_{x\in K} \varphi(x) = \varphi(x_{min}) = m$$

$$\|x\| = \varphi(x) \ne 0, x \in K \Rightarrow m, M > 0$$

$$\exists \{x^{k_i}\}_i, \|x^{k_i} - x^0\|_2 \to 0, x^{k_i} \to x^0$$

$$\forall x \in K : 0 < m \le \|x\|_2 \le M$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \ne 0$$
$$x' = \frac{x}{\|x\|_2} \in K$$
$$m \le \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \le M$$
$$m\|x\|_2 \le \|x\| \le M\|x\|_2$$

רציפות במידה שווה

הגדרה

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$$

f רציפה במ"ש על Ω אם $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \Omega, \|x' - x''\| < \delta \Rightarrow \|f(x') - f(x'')\| < \epsilon$

משפט Cantor

תהי $f: \underset{\in\mathbb{R}^n}{K} \to \mathbb{R}^m$, נניח כי K קומפקט ו-f רציפה ב-K, אז f רציפה במ"ש.

הוכחה

נניח ש f לא רציפה במ"ש.

$$\exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x', x'' \in K, \|x' - x''\| < \delta \wedge \|f(x') - f(x'')\| \ge \epsilon$$

$$\delta \coloneqq \frac{1}{k}, k = 1,2, \dots$$
$$x' \coloneqq x'_k$$
$$x'' \coloneqq x''_k$$

$$\left|\left|x'_k - x''_k\right|\right| < \frac{1}{k} \wedge x'_k, x''_k \in K$$

וגם

$$\left|\left|f(x'_k) - f(x''_k)\right|\right| \geq \epsilon$$

לפי למה B-W $\exists x'_{k_i} \to x_0 \in K$

$$x''_{k_i} = \underset{\substack{\downarrow \\ x_0}}{x'_{k_i}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\left(x''_{k_i} - x'_{k_i}\right)}$$

$$x''_{k_i}, x''_{k_i} \to x_0$$

f רציפה ולכן $f\left(x'_{k_i}\right) \to f(x_0), f\left(x''_{k_i}\right) \to f(x_0)$

$$\lim_{i\to\infty}\left(f(x'_k) - f(x''_k)\right) = 0$$

אבל $\left|\left|f(x'_k) - f(x''_k)\right|\right| \geq \epsilon > 0$ בסתירה.

גזירות ב$\mathbb{R}^n$

אופרטור ליניארי $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

בסיס ב$\mathbb{R}^n$: $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_n e_i$$

נורמה של אופרטור

L – פונ' רציפה. גם $\left|\left|L(x)\right|\right|$ רציפה.

$$M \coloneqq \sup_{\left|\left|x\right|\right| \leq 1} \left|\left|L(x)\right|\right|$$

לפי משפט $Weirstrass$ $M < \infty$.

$$\left|\left|L\right|\right| \coloneqq M$$

אי שוויון נורמטיבי

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \left|\left|L(x)\right|\right| \leq \left|\left|L\right|\right| * \left|\left|x\right|\right|$$

הוכחה

$x = 0$ טריוויאלי

$x \neq 0$

$$x' = \frac{x}{\left|\left|x\right|\right|} \Rightarrow \left|\left|x'\right|\right| = 1$$

$$\left|\left|L(x')\right|\right| \leq \left|\left|L\right|\right|$$

$$\frac{1}{\left|\left|x\right|\right|}\left|\left|L(x)\right|\right| = \left|\left|L\left(\frac{x}{\left|\left|x\right|\right|}\right)\right|\right| \leq \left|\left|L\right|\right|$$

$$||L(x)|| \leq ||L||||x||$$

גזירות ב$\mathbb{R}^n$

הגדרה

$$\alpha(x), \beta(x) \xrightarrow[x\to p]{} 0$$

$$\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big), x \to p$$
$$\frac{\alpha(x)}{||\beta(x)||} \xrightarrow[x\to p]{} 0$$

הגדרה שקולה: $\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big) \Leftrightarrow \alpha(x) = \epsilon(x)\beta(x), \epsilon(x) \xrightarrow[x\to p]{} 0$

$$\alpha(x) \to 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = o(1)_{x\to p}$$

גזירות ודיפרנציאל

$$\boldsymbol{n = 1}$$

f גזירה בa אם"ם $f'(a) := \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \exists$

$$\epsilon(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - k \xrightarrow[x\to a]{} 0$$
$$f(x) - f(a) = k(x-a) + \epsilon(x)(x-a)$$
$$x - a = h$$
$$\boxed{f(a+h) = f(a) + kh + \epsilon(a+h)h \qquad \epsilon(a+h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0}$$

הגדרה

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$$

$a \in \Omega$ נקודה פנימית, $a \in \Omega^o$

אומרים כי f דיפירנציאלית (גזירה) בנקודה a אם מתקיים קיים אופרטור ליניארי $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ כך ש:

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \epsilon(h)||h||$$

עבור $\epsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, $||h|| < \delta$. $\epsilon(h)||h|| = o(||h||), h \to 0$

אופרטור L דיפרנציאל של f בנקודה a.

$$L := df_a$$
$$h \in \mathbb{R}^n : L(h) = df_a(h)$$

משפט

df_a הוא יחיד.

הוכחה

נניח כי $\exists L_1, L_2$ אופ' לינא'

$$f(a+h)-f(a)=L_1(h)+\epsilon_1(h)\|h\|$$
$$f(a+h)-f(a)=L_2(h)+\epsilon_2(h)\|h\|$$

$$0=L_1(h)-L_2(h)+\left(\epsilon_1(h)-\epsilon_2(h)\right)\|h\|$$

נקבע $0\neq h_0\in\mathbb{R}^n$

$$h=th_0,t\in\mathbb{R}$$
$$0=tL_1(h_0)-tL_2(h_0)+\left(\epsilon_1(th_0)-\epsilon_2(th_0)\right)|t|\|h_0\|$$
$$0=L_1(h_0)-L_2(h_0)+\left(\epsilon_1(th_0)-\epsilon_2(th_0)\right)|t|\|h_0\|\frac{1}{t}$$
$$t\to 0:0=L_1(h_0)-L_2(h_0)\Rightarrow L_1=L_2$$

דוגמא

$$f(x,y,z)=(xyz.x+z^2)$$
$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,a=(2,1,0)$$

$$h=(h_1,h_2,h_3)$$

$$f(2+h_1,1+h_2,h_3)=\left((2+h_1)(1+h_2)h_3,2+h_1+h_3^2\right)=(h_3(2+h_1+2h_2+h_1h_2),2+h_1+h_3^2)=$$
$$(2h_3+h_1h_3+2h_2h_3+h_1h_2h_3,2+h_1+h_3^2)=(0,2)+(2h_3,h_1)+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\right)$$

זה $o(\quad)$ כי $|h_ih_j|\le\frac{|h_i|^2+|h_j|^2}{2}\le\frac{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^3}\right)^2}{2}$

$$f(a)=(0,2),df_a=(2h_3,h_1)$$
$$\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}$$

הרצאה 7

למה .B.-W

$$\forall\{x^k\}_{k=1}^{\infty}, \left|\left|x^k\right|\right|_2 \leq C \Rightarrow \exists\{x^{k_i}\}_{i=1}^{\infty} : x^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} x^o, \left|\left|x^{k_i} - x_o\right|\right|_2 \to 0$$

גזירות

$$a \in \overset{o}{\Omega}$$

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבל ב-a אם $\exists L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ כך ש:

$$\left|\left|h\right|\right| < \delta : f(a+h) - f(a) = L(h) + \epsilon(h)\left|\left|h\right|\right|$$
$$\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$$

$$L \coloneqq df_a$$

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o\left(\left|\left|h\right|\right|\right)_{h\to 0}$$

משפט

אם f דיפ' ב-a אזי f רציפה שם.

$$a + h = x$$

$$f(x) = f(a) + df_a(x-a) + o\left(\left|\left|x-a\right|\right|\right)_{x\to a}$$

$$x \to a \Rightarrow f(x) \to f(a)$$

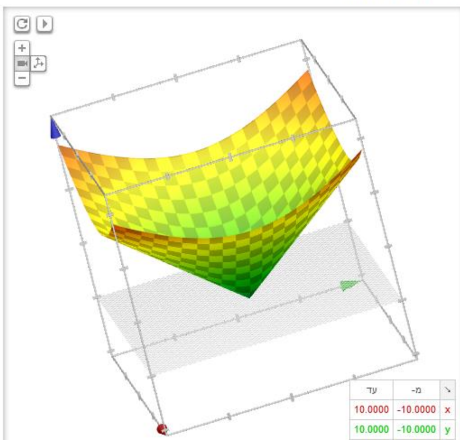
ולכן רציף.

דוגמא

1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, a = (0,0)$

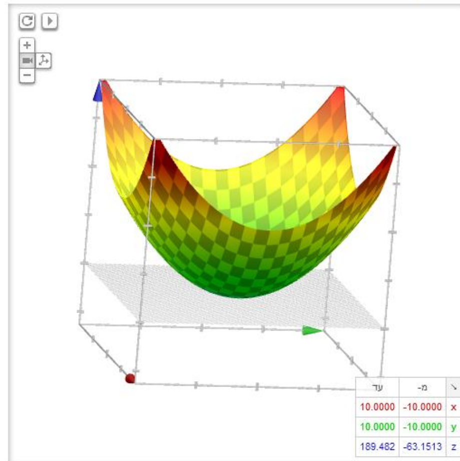
לא דיפ'.

גרף ל-sqrt(x^2+y^2)



2) $f(x,y) = x^2 + y^2$

גרף ל-x^2+y^2



$$L \stackrel{?}{=} 0$$

$$f(a+h) \stackrel{?}{=} f(a) + D + \epsilon(h)\|h\|$$

$$h = (h_1, h_2) \Rightarrow h_1^2 + h_2^2 = \epsilon(h)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\epsilon(h) = \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \xrightarrow[(h_1,h_2)\to 0]{} 0$$

כן דיפ'.

נגזרת חלקית

הגדרה

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^m, a \in \overset{o}{\Omega}$$

נקבע $1 \le i \le n$, קיימת נגזרת חלקית של f בנקודה a לפי x_j אם קיים הגבול

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

$$e_j = (0,0, \dots, 1, \dots, 0)$$

סימונים

$$n = 1 : f', \frac{df}{dx}$$

$$n = 2 : \frac{\partial f}{\partial x_j}, D_j f, \ f'_{x_j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathrm{a}) = \lim \frac{f(a_1, \dots, a_j + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}$$

כלומר

$$\varphi(u) \coloneqq f(a_1, \dots, a_{j-1}, u, \dots, a_n)$$
$$\varphi(a_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

נגדיר

$$\Psi(t) \coloneqq f(a + te_j)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{\Psi(t) - \Psi(0)}{t} = \Psi'(0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \frac{d}{dt}f(a + te_j)|_{t=0}$$

דוגמא

$$f(x,y) = \arctan\left(\ln x\, e^{\sin(x^2+y^2)}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2013) = 0$$

מספיק להציב $x = 1$ בשביל למצוא את הנגזרת.

יחס בין דפר' לבין נגזרת חלקית

$$f:\Omega\to\mathbb{R}^m$$

$$f(x)=\big(f_1(x),\dots,f_m(x)\big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a),\dots,\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a)\right)$$

משפט

$$f:\Omega\to\mathbb{R}^m, a\in\overset{o}{\Omega}$$

נניח ש f דפ' בנקודה a, אזי לכל $1\le j\le n$ קיימת $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=df_a(e_j)$

הוכחה

$$L\coloneqq df_a$$

$$f(a+h)=f(a)+L(h)+\epsilon(h)||h||$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

$$f(a+te_j)-f(a)=L(te_j)+\epsilon(te_j)|t|\,||e_j||$$

$$L(te_j)=tL(e_j), ||e_j||=1$$

$$\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}=L(e_j)+\underbrace{\frac{|t|}{t}\epsilon(te_j)}_{\xrightarrow[t\to0]{}0}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}=L(e_j)$$

משפט

$$\forall h\in\mathbb{R}^n: df_a(h)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$$

הוכחה

$$h=\sum_{j=1}^n h_je_j$$

$$df_a(h)=df_a\left(\sum_{j=1}^n h_je_j\right)=\sum_{j=1}^n h_jdf_a(e_j)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$$

$$f=(f_1,\dots,f_m)$$

$$L=df_a(h)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\,h_j$$

$$L(h)=\big(L_1(h),\dots,L_m(h)\big)$$

$$\forall 1 \le j \le n : L_j(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(a)h_j$$

לכן:

$$\begin{pmatrix} L_1(h) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ L_n(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

מטריצה של האופרטור $L = df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$df_a \sim \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{m,n}$$

מטריצה של Jacobi

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{m,n}$$

$$df_a(h) = J_f(a)h$$

דוגמא

$$f(x,y,z) = (\sin xy , x^2 + y^2 + z), f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$df(1,2) = ?$$

$$J_f(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \cos xy & x \cos xy & 0 \\ 2x & 2y & 1 \end{pmatrix}_{\substack{|x=1 \\ |y=2}} = \begin{pmatrix} 2\cos 1 & \cos 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$m = 1$

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

גרדיאנט של f בנק' a

$$grad\, f(a) = \nabla f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \dots \dots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix}$$

$$df_a(h) = J_f(a)h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

דוגמא

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

גזירה בנקודה $a=(0,0)$?

1) רציפה ב a : $|f(x,y)|=\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0=f(0,0)$

2) $\exists\frac{\partial f}{\partial x}(a),\frac{\partial f}{\partial y}(a)$?

$$f(x,0)=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{df}{dx}(x,0)|_{x=0}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{df}{dy}(0,y)|_{y=0}=0$$

3) גזירות?

$$L=df_a(h)=\sum_{j=1}^{n}\frac{df}{dx_j}(a)h_j$$

אם df_a קיים אז $df_a\equiv 0$.

$$f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\epsilon(h)\left||h|\right|_{h\to 0}$$
$$\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0+0+\epsilon(h)\left||h|\right|_{h\to 0}$$
$$\epsilon(h)=\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\underbrace{\nrightarrow}_{\substack{\text{גבול לא קיים}\\ \text{הוכח לפני}}}0$$

ולכן לא גזיר ב a.

דוגמא

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$
$$\sqrt{|xy|}=0+\epsilon(xy)\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$
$$\epsilon(x,y)=\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$x\neq 0:\epsilon(x,x)=\frac{|x|}{\sqrt{2}|x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\nrightarrow 0$$

הרצאה 8

דוגמאות

$$f(x,y) = xy + \sin(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + \cos(x^2+y^2)\,2x$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & else \end{cases}$$
$$a = (0,0)$$
$L \equiv 0$ מועמד
$$f(h) = f(0) + L(h) + \epsilon(h)\|h\| \qquad \epsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$
$$\epsilon(h) = \frac{f(h)}{\|h\|} = \sqrt{h_1^2+h_2^2}\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

כלומר f דיפ' ב$a = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$
$$(x,y) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

אבל זה לא מוגדר ב$(0,0)$, גם הגבול לא מוגדר.

$$2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$
$$-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \not\to \text{אין גבול}$$

הגדרות

$U \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, נסמן $U \subset\circ\, \mathbb{R}^n$ ($\circ$=Open).

$$D(U) = \{\text{כל פונקציות דיפרנציאל ב } \forall u \in U\}$$
$$C(U) = \{\text{כל פונקציות רציפה ב } \forall u \in U\}$$
$$D(U) \subset C(U)$$

פעולות

1. $f(x)\equiv c \quad \forall a\in\mathbb{R}^n:\ df_a(h)\equiv 0$

$$f(a+h)-f(a)=df_a+o(||h||)_{h\to 0}\Rightarrow 0=c-c=0+0$$

2. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n \quad x\in\mathbb{R}^n \quad f(x)=x \quad df_a(h)=h$

$$a+h-a=h+\epsilon(h)||h|| \quad \epsilon(h)\equiv 0$$

3. $f(x)=L(x)$ אופרטור ליניארי, $dL_a=L$

$$L(a+h)-L(a)=L(h)+0$$
$$f(a+h)-f(a)=L(h)+0$$

4. $m=1$

$$f(x)g(x)$$
$$d_a(fg)(h)=f(a)dg_a(h)+g(a)df_a(h)$$

$$f(a+h)=f(a)+df_a(h)+o(||h||)_{h\to 0}$$
$$g(a+h)=g(a)+dg_a(h)+o(||h||)_{h\to 0}$$

$$f(a+h)g(a+h)$$
$$=f(a)g(a)+\underbrace{f(a)dg_a(h)+g(a)df_a(h)}_{\text{ליניארי}}$$
$$+\underbrace{f(a)o(||h||)+g(a)o(||h||)+df_a(h)o(||h||)+dg_a(h)o(||h||)+o(||h||)o(||h||)+dg_a(h)df_a(h)}_{o(||h||)}$$

$$||df_a(h)||\le||df_a||||h||$$
$$||dg_a(h)||\le||dg_a||||h||$$
$$||df_a(h)dg_a(h)||\le||df_a||||dg_a||||h||$$
$$df_a(h)dg_a(h)=o(||h||)_{h\to 0}$$

נגזרת מכוונת ונגזרת לפי וקטור

הגדרה

$$f:\underset{\overset{\subseteq\mathbb{R}^n}{o}}{\Omega}\to\mathbb{R}^m$$
$$a\in\Omega$$

נקבע $0\neq h\in\mathbb{R}^n$

אומרים קיימת נגזרת של f ב-a לפי הווקטור h אם קיים:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}:=\partial_h f(a)$$

$$\partial_h f(a)=\frac{d}{dt}f(a+th)|_{t=0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\partial_{e_j}f(a)$$

משפט

אם f דיפ' בנקודה a אז לכל $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ קיימת $\partial_h f(a)$ ו-$\partial_h f(a) = df_a(h)$

הוכחה

$$\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = \frac{f(a) + t * df_a(h) + o(|t|\|h\|) - f(a)}{t} = df_a(h) + \frac{o(|t|\|h\|)}{t}$$

$$\frac{o(|t|\|h\|)}{t} = \frac{\epsilon(|t|\|h\|)|t|\|h\|}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{t(a+\mathrm{t}h)-f(a)}{t} = df_a(h) = \partial_h f(a)$$

$m = 1$

$$(\partial_h f)(a) = df_a(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle$$

אם f דיפ' ב-a.

דוגמא

$$f(x,y) = \sqrt{\|xy\|}$$
$$a = (0,0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$h = (1,1) \qquad \partial_h f(0,0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\sqrt{|tt|}$$

$$\sqrt{th_1 th_2} = |t|\sqrt{h_1 h_2} = |t|$$

מסקנה: $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ לא דיפ' ב-a.

דוגמא

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & else \end{cases}$$

לא רציף ב-$(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$
$$f(x,0) = f(0,y) = 0$$
$$h = (h_1, h_2)$$
$$(x,y) = t(h_1,h_2) = (th_1, th_2)$$

$$\Omega := \{(x,y) \mid x^2 < y < 2x^2\}$$

$$(x,y) \in \Omega \Leftrightarrow x^2 < y < 2x^2 \Leftrightarrow t^2 h_1^2 < th_2 < 2t^2 h_1^2$$

בלי הגבלת הכלליות : $t, h_1, h_2 > 0 \Rightarrow h_2 < 2th_1^2 \wedge t > \frac{h_2}{2h_1^2}$

$$0 < t < \frac{h_2}{2h_1^2} \Rightarrow (th_1, th_2) \notin \Omega$$

אם $\frac{h_2}{2h_1^2} > t > 0$ אז $f(th_1,th_2)=0$ ולכן $\lim_{t\to 0}\frac{f(th_1,th_2)-f(0,0)}{t}=0$

קיבלנו $\forall h \exists \partial_h f(0,0)$ אבל f לא דיפ' ב$(0,0)$ ולא רציפה.

נגזרת מכוונת directional derivative

e כיוון, ניקח $\|e\|=1$.

הגדרה

נגזרת של f בנק' a לפי הכיוון l המוגדר ע"י e.

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a)=\partial_e f(a)$$

דוגמא

$$f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0)=?$$

l –כיוון – זווית α עם ציר x.

$$e=(\cos\alpha,\sin\alpha)$$
$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0)=\partial_e f(x_0,y_0)=\langle\nabla f(x_0,y_0),e\rangle$$
$$\nabla f(x_0,y_0)=\left(\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2},\frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0)=\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2}\cos\alpha+\frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2}\sin\alpha$$

e – כיוון המוגדר ע"י $h=(1,1)$

$$\partial_h f(x,y)=\langle\nabla f(x,y),h\rangle$$
$$\frac{\partial f}{\partial l}(x,y)=\langle\nabla f(x,y),e\rangle$$
$$e=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{(1,1)}{\|1,1\|_2}$$

משפט

f דיפ' $(m=1)$ ב-a, אז $\forall e: \|e\|_2=1 \quad |\partial_e f(a)|\le\|\nabla f(a)\|_2$

הוכחה

$$|\partial_e f(a)|=|\langle\nabla f(a),e\rangle|\le\|\nabla f(a)\|_2\|e\|_2=\|\nabla f(a)\|_2$$

נניח $\nabla f(a)\neq 0$. נגדיר $e_0=\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$, אזי

$$\partial_{e_0}f(a)=\langle\nabla f(a),\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}\rangle=\frac{1}{\|\nabla f(a)\|}\langle\nabla f(a),\nabla f(a)\rangle=\|\nabla f(a)\|$$

מסקנה

$$e_0 = \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$$

אז לכל $e: ||e||_2 = 1$ מתקיים $|\partial_e f(a)| \le |\partial_{e_0} f(a)|$

יש שוויון אם"ם $e = \pm \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$

כלומר:

$$|\partial_{e_0} f(a)| = \max_{||e||=1} |\partial_e f(a)|$$

מסקנה

גרדיאנט הוא הכיוון של השינוי המקסימאלי בנקודה a

$\partial_{e_0} f(a) = \langle \nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||} \rangle = ||\nabla f(a)|| > 0$ כלומר עלייה מקסימלית

$\partial_{-e_0} f(a) = -||\nabla f(a)|| \le 0$ כלומר ירידה מקסימלית.

דוגמא

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

(x_0, y_0), מה הכיוון של שינוי מקסימלי?

$$e_0 = \frac{(-2x_0, -2y_0)}{\sqrt{4x_0^2 + 4y_0^2}}$$

צריך ללכת תמיד בכיוון $(-x_0, -y_0)$

הרצאה 9

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i+o(||h||)_{h\to 0}$$

$$o(||h||)_{h\to 0}=\epsilon(h)||h|| \qquad \epsilon(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

$$f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)+o(||x-a||)_{x\to a}$$

$$\boldsymbol{m=1}:$$

$$f(a+h)=f(a)+\langle\nabla f(a),h\rangle+o(||h||)_{h\to 0}$$

$$f(x)=f(a)+\langle\nabla f(a),x-a\rangle+o(||x-a||)_{x\to a}$$

דיפרנציאליות

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\langle\nabla f(a),h\rangle}{||h||}=0\Rightarrow\forall i\exists\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}$$

$$f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)+\underbrace{\epsilon(x-a)}_{\xrightarrow[x\to a]{}0}||x-a||$$

זה קירוב לפונקציה: $f(x)\approx f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)+o(||x-a||)_{x\to a}$,

דוגמא

$$f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1+xy} \qquad |x|,|y|\ll 1$$

$$a=0: f(x,y)\approx f(a)+\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-a_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-a_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}=\frac{1+xy-(x+y)y}{(1+xy)^2}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$$

$$\arctan\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

דוגמא

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(a),\frac{\partial f}{\partial y}(a)\ \exists$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ אבל f לא דיפ' $(0,0)$.

משפט (תנאי מספיק לדיפ')

נניח כי: $f:\Omega\to\mathbb{R}^m, a\in\overset{o}{\Omega}$

1) קיימות $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ לכל x בסביבה $B_a(\delta)\subset\Omega$.

2) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\ :\ \forall i$ רציפות ב$B_a(\delta)$.

אזי f דיפ' בנקודה a.

הוכחה

ניקח $n=2$.

$$\|h\|<\delta:\ f(a+h)-f(a)\overset{?}{=}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i+\underbrace{\epsilon(h)\|h\|}_{\epsilon(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0}$$

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=\underbrace{f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)}_{x\text{ שינוי לגבי }}+\underbrace{f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)}_{y\text{ שינוי לגבי }}$$

לפי משפט $Lagrange$ למשתנה אחד $g(x_0+h)-g(x_0)=g'(x_0+\theta h)h$:

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+h_2)h_1\qquad 0<\theta_1<1$$

$$f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2+\theta_2 h_2)h_2\qquad 0<\theta_2<1$$

$$\begin{aligned}f(a+h)-f(a)-\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2\\ &=\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+h_2)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2+\theta_2 h_2)h_2-\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_1\\ &=\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2\end{aligned}$$

עבור $\alpha(h)=\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(a),\ \beta(h)=\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2+\theta_2 h_2)-\frac{\partial f}{\partial y}(a)$

$$f(a+h)-f(a)-\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2=\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2$$

הנגזרות החלקיות רציפות ולכן $\begin{matrix}\alpha(h)\to 0\\ \beta(h)\underset{h\to 0}{\to} 0\end{matrix}$

$$\|\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2\|\le|h_1|\,\|\alpha(h)\|+|h_2|\,\|\beta(h)\|\le\sqrt{\|\alpha(h)\|^2+\|\beta(h)\|^2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\left\|\frac{\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right\|\le\sqrt{\|\alpha(h)\|^2+\|\beta(h)\|^2}\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

$$\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2=o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)_{h\to 0}$$

לכן קיבלנו

$$f(a+h)-f(a)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

ולכן f דיפ' בנקודה a.

עבור $m>2$

$$\begin{aligned}&f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,\dots,a_n)=\\&=f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_n)\\&+f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_2)-f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_2)\\&+f(a_1,a_2,a_3+h_3,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,a_2,a_3+h_3,\dots,a_n+h_n)\\&+\dots+f(a_1,\dots,a_{n-1},a_n+h_n)-f(a_1,\dots,a_n)\end{aligned}$$

לפי משפט לגראנז' $f(a+h)-f(a)=\alpha_1(h)h+\dots+\alpha_n(h)h_n-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$ כאשר $\alpha_i\xrightarrow[h\to 0]{}0$

$$\left\|f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i\right\|\le\sqrt{\left\|\alpha_1(h)\right\|^2+\cdots\left\|\alpha_n\right\|^2}\sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2}$$

$$\Rightarrow f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i=o(\|h\|)_{h\to 0}$$

דוגמא שבה הפונקציה דיפ' אבל התנאים לא מתקיימים

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

$$a=(0,0)$$

דיפ'? $f(h)=\underbrace{f(0)}_{0}+\underbrace{L(h)}_{0}+\underbrace{\epsilon(h)\|h\|}_{\xrightarrow[h\to 0]{}0}$

$$(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\overset{?}{=}o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0$$

$$df_a=0$$

$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ לא חסומות סביב $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

$$(x,y)\neq(0,0):\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0$$

$y=0\Rightarrow -\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$: $x=0$ לא חסומה סביב $-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

ולכן $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ לא חסומה בסביבה של $(0,0)$.

דוגמא

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & else\end{cases}$$

$$a=(0,0)$$

1) רציפות

$$|f(x,y)|=\left|\frac{x(x^2-y)}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=|x|$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$ ולכן רציפה

2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$f(x,0)=\begin{cases}x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$$

$$f(0,y)=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

מועמד לדיפ' : $L(h)=h_1$

$$L(h)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2=h_1$$

$$f(a+h)=f(a)+L(h)+\epsilon(h)\big||h|\big|_{h\to 0}$$

$$\frac{h_1^3-h_1h_2^3}{h_1^2+h_2^2}=0+h_1+\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

נבדוק כי $\epsilon(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$

$$\epsilon(h)=\frac{\frac{h_1^3-h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{h_1^3-h_1h_2^2-h_1^3-h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-2h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\epsilon(h_1,h_1)=-\frac{2h_1^3}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{h_1^3}{|h_1|^3}\underset{h_1\to 0}{\not\to}0$$

כלומר f לא דיפ' ב$(0,0)$.

תרגיל בית

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

1) $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

2) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ לא רציפות.

$$n = 1 : f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

משמעות גאומטרית של גזירות מישור משיק

מישור משיק

נניח ש f דיפ' בנקודה a, $m = 1$ אזי

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + o(\|x - a\|)_{x \to a}$$

גרף של f:

$$\boxed{\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots x_n) \in Dom(f), x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}}$$

הרצאה 10

$$\Gamma_f$$
$$l(x) = f(a) + df_a(x-a)$$
$$f(x) = l(x) + O\left(\left|\left|x-a\right|\right|\right)_{,x\to a}$$

Γ_l – מישור משיק לΓ_f בנקודה $(a, f(a))$.

$$l(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) = A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + B$$

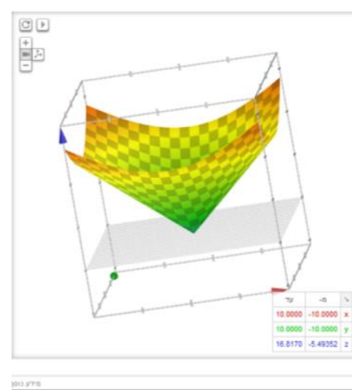
Γ_l – מישור אפיני עבור הנקודה $(a, f(a))$. $l(a) = f(a)$

$$f(x) - l(x) = O\left(\left|\left|x-a\right|\right|\right)_{,x\to a}$$

דוגמא

$$n = 2$$
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Gamma_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

ניקח מישור $z = 0$ ב$a = (0,0)$. $f(x) - l(x) = \sqrt{x^2+y^2} = \left|\left|x,y\right|\right|$, ולכן זה לא $O\left(\left|\left|x-0\right|\right|\right)$, כל מישור משיק אחר יהיה $f(x) - f(a) = \alpha\left|\left|x,y\right|\right|$ ולכן זה לא מישור משיק.



b

משוואה של מישור משיק

$$\boxed{x_{n+1} = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)}$$

$$T_{(a,f(a))}(\Gamma_f)$$

$$a_{n+1} = f(a) = f(a_1, \dots, a_n)$$

$$\boxed{\begin{gathered} x_{n+1} - a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \\ a_{n+1} = f(a) \end{gathered}}$$

$$\boldsymbol{n=2}$$

$$a=(x_0,y_0)$$
$$f(a)=z_0$$
$$z=f(x,y),(x,y)\in U$$
$$z_0=f(x_0,y_0)$$

המשוואה של $T_{(x_0,y_0,z_0)}$:

$$\boxed{z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

דוגמא

$$z=\sqrt{1-x^2+y^2}$$

$$(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma_f\ ,x_0^2+y_0^2<1\ ,z_0=\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}$$

$$z-z_0=\frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}(x_0-y_0)+\frac{-y_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}(y-y_0)$$
$$z-z_0=-\frac{x_0}{z_0}(x-x_0)-\frac{y_0}{z_0}(y-y_0)$$

$$z_0z-z_0^2=-x_0x+x_0^2-y_0y+y_0^2$$
$$x_0x+y_0y+z_0z=x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$$

$$x_0x+y_0y+z_0z=1$$

דיפרנציאל של פונקציית הרכבה

משפט (כלל השרשרת)

$$U_1\subset\circ\,\mathbb{R}^n,U_2\subset\circ\,\mathbb{R}^m$$

$$U_1\xrightarrow{u}U_2\xrightarrow{f}\mathbb{R}^l$$

נניח ש:

1) u דיפ' ב$a\in U_1$
2) f דיפ' ב$b=u(a)\in U_2$

אזי הפונ' $g(x)=f\big(u(x)\big)$ היא דיפ' בa ומתקיים $dg_a=df_b\circ du_a$.

הוכחה

$$L\coloneqq du_a,M\coloneqq df_b$$

$$u(a+h)=u(a)+L(h)+\underbrace{\epsilon_1(h)}_{\epsilon_1(h)\xrightarrow[h\to0]{}0}\ \big||h|\big|$$

$$f(b+k)=f(b)+M(k)+\underbrace{\epsilon_2(k)}_{\epsilon_2(k)\xrightarrow[k\to0]{}0}\ \big||k|\big|$$

$$g(a+h)=f\big(u(a+h)\big)=f\big(u(a)+L(h)+\epsilon_1(h)\big||h|\big|\big)=f\left(b+\underbrace{L(h)+\epsilon_1(h)\big||h|\big|}_{k}\right)$$

$$f(b)+M\big(L(h)+\epsilon_1(h)||h||\big)+\epsilon_2\big(L(h)+\epsilon_1(h)||h||\big)\Big|\Big|L(h)+\epsilon_1(h)||h||\Big|\Big|$$

$$f(b)=f\big(u(a)\big)=g(a)$$

$$g(a+h)=g(a)+M\big(L(h)\big)+\underbrace{\overbrace{M\big(\epsilon_1(h)||h||\big)}^{\alpha(h)}+\overbrace{\epsilon_2\big(L(h)+\epsilon_1(h)||h||\big)\Big|\Big|L(h)+\epsilon_1(h)||h||\Big|\Big|}^{\beta(h)}}_{o(||h||)?}$$

$$\frac{\alpha(h)}{||h||}=\frac{||h||M\big(\epsilon_1(h)\big)}{||h||}=M\big(\epsilon_1(h)\big)$$

$$\left|\left|\frac{\alpha(h)}{||h||}\right|\right|\leq||M||||\epsilon_1(h)||\xrightarrow[h\to0]{}0\Rightarrow\alpha(h)=o\big(||h||\big)_{,h\to0}$$

$$\Big|\Big|L(h)+\epsilon_2(h)||h||\Big|\Big|\leq||L(h)||+||\epsilon_1(h)||||h||\leq||L||||h||+||\epsilon_1(h)||||h||$$

$$\frac{||\beta(h)||}{||h||}\leq\frac{\Big|\Big|\epsilon_2\big(L_1(h)+\epsilon_1(h)\big)||h||\Big|\Big|}{||h||}\big(||L||||h||+||\epsilon_1(h)||||h||\big)$$

$$=\Big|\Big|\epsilon_2(L\big((h)\big)+\epsilon_2(h)||h||\Big|\Big|\big(||L||+||\epsilon_1(h)||\big)\xrightarrow[h\to0]{}0$$

$$\Rightarrow\beta(h)=o\big(||h||\big)_{,h\to0}$$

כלומר: $g(a+h)=g(a)+M\big(L(h)\big)+o\big(||h||\big)_{h\to0}$

ולכן g דיפ' ב-a ומתקיים $df_b\big(du_a(h)\big)=dg_a(h)$

נוסחה למטריצת יעקובי

$$\boxed{J_{f\circ u}(a)=J_f(u(a)*J_u(a)}$$

כלל שרשרת לנגזרות

$$g=f\circ u\,;l=1$$

$$g(x_1,\dots,x_n)=f\big(u_1(x_1,\dots,x_n),\dots,u_m(x_1,\dots,x_n)\big)$$

$$J_g(a)=J_f\big(u(a)\big)J_u(a)$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(u(a)\big),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\big(u(a)\big)\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial n}(a)\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_i}\big(u(a)\big)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(a)\\ *\,g'_{x_k}=f'_{u_1}u'_{1,x_k}+\dots+f'_{u_m}u'_{m,x_k}\end{array}}$$

*יש להיזהר לא להתבלבל עם הצבות, ב-f'_{u_j} מציבים $u(a)$ וב-u'_{j,x_j} מציבים a.

תרגילים

1)

$$g(x,y,z)=f\left(\overbrace{x+y+z}^{u},\overbrace{x^2+y^3+z^4}^{v}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial u}(x+y+z,x^2+y^3+z^4)+\frac{\partial f}{\partial v}(x+y+z,x^2+y^3+z^4)2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial u}(\ ,\ )+\frac{\partial f}{\partial v}(\ ,\ )3y^3$$

2) $g(x,y,z)=f(xyz)$

$$f(u);u=xyz$$
$$g'_x(x,y,z)=f'_x(xyz)yz$$

הגדרה

$f(x_1,\dots,x_n)$ הומוגנית מסדר m אם $\forall\lambda\in\mathbb{R}:f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)=\lambda^m f(x_1,\dots,x_n)$

נניח f דיפ', אזי: f הומו' מסדר m $\Leftrightarrow$ $\frac{x_1\partial f}{\partial x_1(x)}+\dots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)=mf(x)$ (משוואת אוילר ממד"ח).

הוכחה

$\Leftarrow$

$$f(\lambda x)=\lambda^m f(x)$$
$$\frac{d}{d\lambda}f(\lambda x)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x)x_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x)x_n=m\lambda^{m-1}f(x)$$
$$\lambda=1\Rightarrow\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=mf(x)$$

$\Rightarrow$

$$\lambda^{-m}f(\lambda x)=const\Leftrightarrow\frac{f}{d\lambda}(\lambda^{-m}f(\lambda x)=0?$$

$$-m\lambda^{-m-1}f(\lambda x)+\lambda^{-m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x)x_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x)x_n\right)=$$

$$-m\lambda^{-m-1}f(\lambda x)+\lambda^{-m-1}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}_{mf(\lambda x)}\right)=0$$

$$\lambda=1:f(x)=c\Rightarrow\frac{f(\lambda x)}{\lambda^m}=f(x)$$

דוגמאות

$$f(x,y)=x+y,f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

הרצאה 11

נגזרות חלקיות מסדר גבוה

$$f: U \to \mathbb{R}^m$$
$$U \subset_\circ \mathbb{R}^n$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x), x \in U, 1 \le i_1 \le n$$

נניח כי קיימת $\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)(x), x \in U$

נניח שקיימת $\frac{\partial}{\partial x_{i_{r-1}}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r-2}}}\left(\dots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\right)\right)(x), x \in U$

$$1 \le i_1, \dots, i_{r-1} \le n$$

נניח שקיימת $\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r-1}}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r-2}}}\left(\dots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\right)\right)\right)(a), a \in U$.

דוגמא

$$f(x,y) = f(x) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \ne 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

$$a = (0,0)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy} f(0,y)|_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{y} = x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x-0}{x} = 1$$
$$f(x,y) = -f(y,x)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) \ne \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

משפט

$$U \subset\circ \mathbb{R}^2 \quad f: U \to \mathbb{R}$$

נניח כי:

1) $\exists \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$

2) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$ רציפות בU.

אזי $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$

הוכחה

$$\Delta^2 := f(a+h,b+h) - f(a,b+h) - f(a+h,b) + f(a,b) =$$
$$= [f(a+h,b+h) - f(a,b+h)] - [f(a+h,b) - f(a,b)]$$

נגדיר $\varphi(t) := f(a+h,t) - f(a,t)$

$$\Delta^2 = \varphi(b+h) - \varphi(b) = (Lagrange) = \frac{d\varphi}{dt}\left(b + \underbrace{\theta_1}_{0<\theta_1<1} h\right)h$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(b+\theta_1 h) = \frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta_1 h) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b+\theta_1 h) = (Lagrange) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a+\theta_2 h, b+\theta_1 h)h$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a+\theta_2 h, b+\theta_1 h)h^2 \Leftrightarrow \frac{\Delta^2}{h^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a+\theta_2 h, b+\theta_1 h)$$

מצד שני : $\Delta^2 = [f(a+h,b+h) - f(a+h)] - [f(a,b+h) - f(a,b)]$

$$\psi(t) := f(t,b+h) - f(t,b)$$

$$\Delta^2 = \psi(a+h) - \psi(a) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(a+\mu_1 h)h$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(a+\mu_1 h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\mu_1 h, b+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\mu_1 h, b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a+\mu_1 h, b+\mu_2 h)h$$
$$(0 < \mu_1, \mu_2 < 1)$$

$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^2}{h^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$ לפי הרציפות של הנגזרות (ולכן של פונ' הרכבה).

בנוסף $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^2}{h^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)$ ולכן $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$

מסקנה

אם קיימות $\frac{\partial}{\partial x_{j_r}}\left(\dots\frac{\partial f}{\partial x_{j_1}}\right)(x), \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left(\dots\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)(x)$ $x \in U$. והן רציפות בסביבה של a אזי הן שוות.

הגדרה

$$C^r(U) := \{f: U \to \mathbb{R} : \text{כל נגזרות מסדר } r \text{ קיימות ורציפות}\}$$

$$D^r(U) := \{f: U \to \mathbb{R} : \text{כל נגזרות מסדר } r \text{ קיימות}\}$$

תהי $f \in C^r(U)$, נגזרת מסדר r: $D_{i_1,\dots,i_r}f = \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r-1}}}\left(\dots\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\right)$ (לדוגמא $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{x_2}\dots\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\right)$)

$$\mathrm{D}_{i_1,\dots,i_r} f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\left(\dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\right) f \qquad \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \dots \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$D_{i_1,\dots,i_r} f = \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1}, \dots, \partial x_n^{\alpha_n}}$$

מולטי אינדקסים

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

n-מימד: $|\alpha| \coloneqq \alpha_1 + \dots \alpha_n = \|\alpha\|_1$

$$\alpha! \coloneqq \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$$h \in \mathbb{R}^n \ , \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : h^\alpha \coloneqq h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

הגדרה

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$D^\alpha f \coloneqq \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}, \dots, \partial x_n^{\alpha_n}}$$

דיפרנציאל מסדר גבוה

יהי פולינום $p(x_1, \dots, x_n) = \sum c_\alpha x^\alpha = \sum\left(c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\right)$ כאשר $|\alpha| \le N$

לדוגמא $p(x, y, z) = 4x^2yz + 2z + x + y$

$$deg(P) = \max\{|\alpha| : c_\alpha \neq 0\}$$

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \le N} C_\alpha x^\alpha \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

הגדרה

P פולינום הומוגני ממעלה m אם $P(\lambda x) = \lambda^m P(x)$

לדוגמא $m = 3$ $\quad f(x, y, z) = x^3 + 2x^2y + 10z^3$

תרגיל

P הומוגני מסדר m $\Leftrightarrow P(x) = \sum_{|\alpha|=m} C_\alpha x^\alpha$

בינום של ניוטון מוכלל

$$(a + b)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a^k b^{r-k} = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=r} \frac{r!}{\alpha_1! \, \alpha_2!} a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}$$

בינום מוכלל

$$(\alpha_1 + \dots \alpha_n)^r = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=r} \frac{r!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} a^\alpha$$

הרצאה 12

$$(a_1+\cdots+a_n)^r=\sum_{|\alpha|=r}\frac{r!}{\alpha!}a^\alpha$$

הוכחה

$$e^{t(a_1+\cdots a_n)}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a_1+\cdots+a_n)^r t^r}{r!}$$

$$e^{t(a_1+\cdots+a_n)}=e^{ta_1}\dots e^{ta_n}=\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\frac{a_1^{\alpha_1}t^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\dots\sum_{\alpha_n=0}^{\infty}\frac{a_n^{\alpha_n}t^{\alpha_n}}{\alpha_n!}=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=r}\left(\frac{a_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\dots\frac{a_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}\right)t^r\right)$$

השוואה של מקדמים:

$$\frac{(a_1+\cdots+a_n)^r}{r!}=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=r}\frac{a_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\dots\frac{a_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}$$

הערה

$$f\in C^1(U)\quad U\subset\circ\,\mathbb{R}^n$$

$$a\in U: df_a(h)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j=\frac{d}{dt}f(a+th)|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dt}f(a_1+th_1,\dots,a_n+th_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th)h_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a+th)h_n$$

הגדרה

$$U\subset\circ\,\mathbb{R}^n; a\in U; f\in C^r(U)$$

נקבע $h\in\mathbb{R}^n$. נגדיר

$$h\neq 0:\varphi(t)=f(a+th)$$

U – פתוחה, קיים $\delta>0$ כך ש $B(a,\delta)\subset U$

$$|t|\|h\|<\delta\Rightarrow a+th\in B(a,\delta)$$

$$|t|<\frac{\delta}{\|h\|}$$

$$\varphi\in C^r(I)\quad I=\left(-\frac{\delta}{\|h\|},\frac{\delta}{\|h\|}\right)$$

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi^r(0)=:d^rf_a(h)\\ d^rf_a(h):=\frac{d^r}{dt^r}f(a+th)|_{t=0}\end{gathered}}$$

משפט

$$U \subset\circ \mathbb{R}^n;\ f \in C^r(U); a \in U$$

אזי

$$\boxed{d^r f_a(h) = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha}$$

עבור

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$
$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$
$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$
$$h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

$d^r f_a$ פולינום הומוגני מסדר r.

הוכחה

$$r = 1$$

$$df_a(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$$

כלומר כאן $|\alpha| = r = 1 \Leftarrow \alpha = \delta_j = (0,0,..,1,\dots,0)$ כלומר $\alpha! = 1$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = \sum_{j=1}^n \frac{1!}{1!} D f^{\delta_j}(a) h^{\delta_j}$$

נניח ש:

$$\frac{d^r}{dt^r} f(a+th)|_{t=0} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha$$

אם הדבר נכון לכל a, נחליף ל$a+sh$

$$\frac{d^r}{dt^r} f(a+sh+th)|_{t=0} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a+sh) h^\alpha$$

$$\frac{d^r}{dt^r} f\big(a+h(s+t)\big)|_{t=0} = \{u = t+s\} = \frac{d^r}{du^r} f(a+hu)|_{t=0} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f^\alpha(a) h^a$$

$$\frac{d}{ds} : (*) \frac{d^{r+1}}{ds^{r+1}} f(a+sh) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{r!}{\alpha!} \frac{d}{ds} D^\alpha f(a+sh) h^\alpha = \sum_{|\alpha|=1} \frac{r!}{\alpha!} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha f(a+sh) h_j \right) h^\alpha$$

נגדיר $\delta_j = (0,\dots,1,.,,0)$

$$h_j h^\alpha = h^{\alpha+\delta_j} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha f = D^{\alpha+\delta_j} f$$

$$(*) = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} \sum_{j=1}^{n} D^{\alpha+\delta_j} f(a+sh) h^{\alpha+\delta_j}$$

נסמן $\beta \coloneqq \alpha + \delta_j$

$$|\beta| = r+1 \Rightarrow \frac{\beta!}{\beta_j} = \alpha! \Rightarrow$$

$$(*) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\beta|=r+1} \frac{r!\,\beta_j}{\beta!} D^{\beta} f(a+sh)\, h^{\beta} = \sum_{|\beta|=r+1} \frac{r!}{\beta!} \sum_{j=1}^{n} \beta_j D^{\beta} f(a+sh)\, h^{\beta}$$

$$\beta_1 + \cdots + \beta_n = |\beta| = r+1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \beta_j = r+1$$

$$\Rightarrow (*) = \sum_{|\beta|=r+1} \frac{r!\,(r+1)}{\beta!} D^{\beta} f(a+sh) h^{\beta}$$

$$s = 0 \Rightarrow \frac{d^{r+1}}{ds^{r+1}} f(a+sh)|_{s=0} = \sum_{|\beta|=r+1} \frac{(r+1)!}{\beta!} D^{\beta} f(a) h^{\beta}$$

ולכן לפי אינדוקציה כדרוש.

נוסחה סימבולית

$$d^r f_a(h) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f|_{x=a}$$

כי

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r = \sum_{\alpha_1+..+\alpha_n=r} \frac{r!}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n} \Rightarrow \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f|_{x=a}$$
$$= \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^{\alpha} f(a) h^{\alpha}$$

נוסחאות טיילור

משפט (נוסחת טיילור עם שארית בצורת לאגרנז')

תהי $U \subset\circ \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(U)$, $a \in U, ||h|| < \delta, B(a,\delta) \subset U$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} d^k f_a(h) + \frac{1}{(r+1)!} d^{r+1} f_{a+\theta h}(h)$$

כאשר $0 < \theta < 1$

$$f(a+h) = P_r f(a,h) + R_r f(a,h)$$

הוכחה

נגדיר $\varphi(t) \coloneqq f(a+th)$ (ונרצה $|t| < 1+\epsilon$) $||th|| < \delta, B(a,\delta) \subseteq U$

אם $||h|| < \frac{\delta}{1+\epsilon}$ אז $a + th \in B(a,\delta) \subset U$ לכל $t \in (-1-\epsilon, 1+\epsilon)$.

נוסחת טיילור ל-φ סביב $t = 0$:

$$\varphi(\mathrm{t}) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0)t + \frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{r!}\varphi^{(r)}t^r + \frac{1}{(r+1)!}\varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0)t + \frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{r!}\varphi^{(r)}(0)t^r + \frac{1}{(r+1)!}\varphi^{(r+1)}(\theta t)t^{r+1}$$

(זה נכון כי יש לנו נוסחאות טיילור ממשתנה 1).

ניקח $t = 1$:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{r!}\varphi^{(r)} + \frac{1}{(r+1)!}\varphi(0)t^{r+1}$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k}f(a+th)|_{t=0} = d^k f_a(h)$$

$$\varphi^{(r+1)}(0) = d^k f_{a+\theta h}(h)$$

מקבלים $\varphi(1) = f(a+h), \varphi(0) = f(a)$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}d^k f_a(h) + \frac{1}{(r+1)!}d^{r+1}f_{a+\theta h}(h)$$

כדרוש!

$$P_r(a,h) = \sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^\alpha f(a)h^\alpha = \sum_{|\alpha|\le r}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a)h^\alpha$$

ולכן $P_r f(a,h)$ הוא סכום של פולינומים הומוגניים.

הרצאה 13

$f \in C^{r+1}(U)$

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha|\le r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a+\theta h) h^\alpha$$

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\le r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f\big(a+\theta(x-a)\big)(x-a)^\alpha$$

$$\boldsymbol{r = 0}$$

$$f(x) = f(a) + df_{a+\theta h}(h)$$

$$df_{a+\theta h}(h) = \langle \nabla f(a+\theta h), h\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+\theta h) h_j$$

מסקנה – משפט על ערך ממוצע

$$f \in C^1(U)$$

$$\boxed{f(x) - f(a) = \langle \nabla f\big(a+\theta(x-a)\big), x-a\rangle}$$

משפט על ערך ממוצע.

מסקנה

אם $\|\nabla f(z)\| \le M$ אזי $\boxed{|f(x) - f(a)| \le \mathrm{M}\|x-a\|}$

אומדן שארית בנוסחת טיילור

הגדרה

קבוצה $U \subset \mathbb{R}^n$ קמורה אם $\forall x, a \in U : [x,a] \subset U$

$$[x,a] \coloneqq \{a + \theta(x-a) : 0 \le \theta \le 1\}$$

משפט

תהי $U \subset_\circ \mathbb{R}^n$, $f \in C^{r+1}(U)$. נניח שלכל α, $|\alpha| = r+1$; $\forall z \in U |D^\alpha f(z)| \le M$, אזי:

$$a \in U \quad \boxed{\begin{aligned} |R_r f(a, x-a)| &\le \frac{M}{(r+1)!}\left(\sqrt{n}\right)^{r+1} \|x-a\|_2^{r+1} \\ |R_r f(a, x-a)| &\le \frac{M}{(r+1)!} \|x-a\|_1^{r+1} \end{aligned}}$$

הוכחה

$$R_r f(a, x-a) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f\big(a+\theta(x-a)\big)(x-a)^\alpha$$

$$|R_r f(a,x-a)| \le \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!}\left|D^\alpha f\big(a+\theta(x-a)\big)\right||(x-a)^\alpha| \le M\sum \frac{1}{\alpha!}|x_1-a_1|^{\alpha_1}\dots|x_n-a_n|^{\alpha_n}$$
$$= \frac{M}{(r+1)!}\sum_{|\alpha|=r+1}\frac{(r+1)!}{\alpha!}|x_1-a_1|^{\alpha_1}\dots|x_n-a_n|^{\alpha_n} \underbrace{=}_{\text{בינום של ניוטון}}$$
$$= \frac{M}{(r+1)!}(|x_1-a_1|^{\alpha_1}\dots|x_n-a_n|^{\alpha_n})^{r+1} = \frac{M}{(r+1)!}\left||x-a|\right|_1^{r+1}$$
$$\left||x-a|\right|_1 \le \sqrt{n}\left||x-a|\right|_2$$

נוסחת טיילור עם שארית בצורה Peano

משפט

$$U \subset\circ \mathbb{R}^n\,; f\colon U \to \mathbb{R}\,; f \in C^r(U), r \ge 1\,, a \in U$$

אזי

$$\boxed{f(a+h) = \sum_{|\alpha|\le r}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a)h^\alpha + o\left(\left||h|\right|^r\right)_{h\to 0}}$$

הוכחה

$$f \in C^r(U) = C^{(r-1)+1}(U)$$

לפי נוסחת טיילור עם שארית $Lagrange$:

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha|\le r-1}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a)h^\alpha + \sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a+\theta h)h^\alpha$$
$$= \underbrace{\sum_{|\alpha|\le r}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a)h^\alpha}_{P_r f(a,h)} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a+\theta h)h^\alpha - \sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a)h^\alpha}_{\alpha(h)}$$

$$|\alpha(h)| \le \sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}(|D^\alpha f(a+\theta h) - D^\alpha f(a)|)|h_1|^{\alpha_1}\dots|h_n|^{a_n}$$

$$\frac{|\alpha(h)|}{\left||h|\right|^r} \le \sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}(|D^\alpha f(a+\theta h) - D^\alpha f(a)|)\frac{|h_1|^{\alpha_1}\dots|h_n|^{a_n}}{\left||h|\right|_r}$$

$$|h_j| \le \sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2} = \left||h|\right|_2 \Rightarrow |h_j|^{\alpha_j} \le \left||\mathrm{h}|\right|^{\alpha_j}$$

$$|h_1|^{\alpha_1}\dots|h_n|^{a_n} \le \left||h|\right|^{\alpha_1+\dots\alpha_n} = ||h|^r$$

$$\frac{|h_1|^{\alpha_1}\dots|h_n|^{a_n}}{\left||h|\right|_r} \le 1$$

ולכן

$$\frac{|\alpha(h)|}{\left||h|\right|^r} \le \sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}|D^\alpha f(a+\theta h) - D^\alpha f(a)|$$

$D^\alpha f(x)$ רציפות ל־$|\alpha| = r$ ולכן $\lim_{h\to 0}|D^\alpha f(a+\theta h) - D^\alpha f(a)| = 0$

ולכן $\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{||h||^r} = 0$ ולכן $\alpha(h) = o\left(||h||^r\right)$

יחידות של פולינום טיילור

משפט

תהי $f \in C^r(U); U \subset_\circ \mathbb{R}^n$

נניח כי

$$f(a+h) = P(h) + o\left(||h||^r\right)_{h\to 0}$$
$$f(a+h) = \tilde{P}(h) + o\left(||h||^r\right)_{h\to 0}$$

עבור $P, \tilde{P}$ פולינומים, $r \geq \max\{\deg P, \deg \tilde{P}\}$

אזי $P = \tilde{P}$

הוכחה

$$Q(h) := P(h) - \tilde{P}(h) = o\left(||h||^r\right)_{h\to 0}$$
$$r > \deg Q =: m$$

$$Q(h) = \sum_{|\alpha|\leq m} q_\alpha h^\alpha \qquad q_\alpha \in \mathbb{R}$$

$$Q(h) = o\left(||h||^r\right)$$
$$h \hookrightarrow th, t \in \mathbb{R}$$

$$Q(th) = \sum_{|\alpha|\leq m} q_\alpha (th)^\alpha = o\left(|t^r|||h||^r\right)_{t\to 0}$$

$$(th)^\alpha = (th_1)^{\alpha_1} \dots (th_n)^{\alpha_n} = t^{|\alpha|}h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow Q(th) = \sum_{|\alpha|\leq m} q_\alpha t^{|\alpha|}h^\alpha = \sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k} q_\alpha t^{|\alpha|}h^\alpha = \sum_{k=0}^{m}\underbrace{\left(\sum_{|\alpha|=k} q_\alpha h^\alpha\right)}_{c_k} t^k = \sum_{k=0}^{m} c_k t^k = o(|t|^r)_{t\to 0}, r \geq m$$

$$\sum_{k=0}^{m} c_k t^k = o(t^r), r \geq m$$

$$c_0 + c_1 t .. + c_m t^m = o(t^r)$$
$$t \to 0 : c_0 = 0$$

$$c_1 + \dots + c_m^{m-1} = o(t^{r-1})$$
$$t \to 0 : c_1 = 0$$

$$\dots$$

$$c_m = 0$$

$$q(h) = \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha h^\alpha = 0 \ \forall k = 0, \dots, m \ \forall h \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial h_1^{\beta_1} \dots \partial h_n^{\beta_n}} q(h)|_{h=0} = \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha D^\beta h^\alpha \,|_{h=0}$$

$$D^\beta h^\alpha = \begin{cases} 0 & \beta \neq \alpha \\ \alpha! & \beta = \alpha \end{cases}$$

וכן אם $q(h) = 0$ נקבל:

$$D^\beta \left(\sum_{|\alpha|=k} q_\alpha h^\alpha \right) |_{h=0} = 0 \Rightarrow q_\alpha \alpha! = 0 \Rightarrow q_\alpha = 0$$

ולכן $Q = P - \tilde{P} = 0$

מסקנה

אם $f \in C^r(U)$ קיים פולינום $P, \deg P \leq r$ כך ש $f(a+h) = P(h) + o\left(||h||^r\right)_{h\to 0}$ אזי P פולינום טיילור בנקודה a.

דוגמא

$$f(x,y) = \frac{1}{1+2x^2 y}$$

$$D^{(10,5)} f(0,0) = ?$$

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{5} (-2x^2 y)^k + o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{15}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{5} (-2x^2 y)^k = \sum_{|\alpha| \leq 15} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0,0) h^\alpha \qquad h = (x,y)$$

$$\alpha = (10,5) \Leftrightarrow k = 5$$

$$-2^5 = \frac{1}{10!\,5!} D^{(10,5)} f(0,0)$$

נוסחת טיילור לפולינומים

משפט

אם P פולינום $\deg P = r$ אזי

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha P(a)(x-a)^\alpha$$

הוכחה

$$R_r P(a,h) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha p(a+\theta h) h^\alpha = 0$$

$$|\alpha| > r \Rightarrow D^\alpha P \equiv 0$$

תרגיל

$$P(x) = \sum a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = \sum_{|\beta|\le r} c_{\beta_1,\dots,\beta_n} (x_1 - a_1)^{\beta_1} \dots (x_n - a_n)^{\beta_n}$$

a מרכז.

תרגיל

$P(x,y,z) = xy + yz,$

$$a = (1,2,1) \quad P(x,y,z) = [(x-1)+1][(y-2)+2] + [(y-2)+2][(z-1)+1]$$
$$= (y-2)(z-1) + 2(z-1) + (y-2) + 2$$

הרצאה 14

אפשר להגיש את שתי התרגילים הבאים בעוד שבועיים, המרצה יבדוק ויתן ציון.

1) $f(x) = \left||x|\right|^{\gamma}, \gamma \in 2\mathbb{N}-1, x \in \mathbb{R}^n$. צ"ל $\forall r < \gamma : f \in C^r(\mathbb{R}^n)\,; \forall r \geq \gamma : f \notin D^r(\mathbb{R}^n)$

2) $f(0,0) = 0 \quad f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$.

$f \in D^1(\mathbb{R}^2) - C^1(\mathbb{R}^2)$.

$$(a) f(x,y) = (x^2+y^2)^2 \sin\frac{1}{x^2+y^2}$$
$$(b) f(x,y) = (x^2+y^2)^3 \sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

מכל מקרה מצא r מקסימלי כך ש$f \in D^r(\mathbb{R}^2)$ וr מקסימלי כך ש$f \in C^r(\mathbb{R}^2)$.

טור טיילור

$$f \in C^{r+1}(\mathbb{R}^n)$$
$$f(x) = \sum_{|\alpha|<r} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(a)(x-a)^{\alpha} + R_r f(a, x-a)$$
$$R_r f(a, x-a) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f\big(a+\theta(x-a)\big)(x-a)^{\alpha}$$

אם U קמורה אזי

$$|D^{\alpha} f(x)| \leq M$$
$$|R_r f| \leq \frac{M}{(r+1)!}\left(\sqrt{n}\right)^{r+1} \left||x-a|\right|^{r+1}$$

הגדרה

אומרים שפונ' f אנליטית אם לכל $a \in U$ קיים $\delta > 0$ כך ש

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha}(a)(x-a)^{\alpha} \quad x \in B_{\delta}(a)$$

$$\mathrm{A(U)} = \{\text{קבוצת כל הפונקציות האנליטיות ב } \mathrm{U}\}$$

f אנליטית אם $|R_r f| \xrightarrow{r\to\infty} 0$.

$$\lim_{r\to\infty} M_{r,\delta} \frac{\left(\sqrt{n}\right)^{r+1}}{(r+1)!} \delta^{r+1} = 0$$
$$M_{r,\delta} \coloneqq \max_{|\alpha|=r+1} \sup_{x\in B_{\delta(a)}} |D^{\alpha} f(x)|$$

דוגמא

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{||x||^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

בדוק : לא אנליטית $\forall\alpha : D^\alpha f(0) = 0, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), f$

קיצונים מקומיים

הגדרה

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \,;\;\; f{:}\,\Omega \to \mathbb{R}$$

אומרים כי $a \in \Omega$ נקודת <u>מינימום מקומי</u> אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$ מתקיים $f(x) \geq f(a)$

אם מתקיים $f(x) > f(a)$ לכל $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$ נאמר כי a נקודת <u>מינימום ממש</u>.

אומרים כי $a \in \Omega$ נקודת <u>מקסימום מקומי</u> אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$ מתקיים $f(x) \leq f(a)$

אם מתקיים $f(x) < f(a)$ לכל $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$ נאמר כי a נקודת <u>מקסימום ממש</u>.

אם $a \in \Omega$ מקסימום או מינימום מקומי נאמר כי a נקודת <u>קיצון מקומי</u>.

אם $a \in \Omega$ max או min מקומי ממש נאמר כי היא נקודת <u>קיצון ממש</u>.

דוגמאות

(1

$$n = 2$$
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$a = (0,0)$ נקודת min ממש.

(2

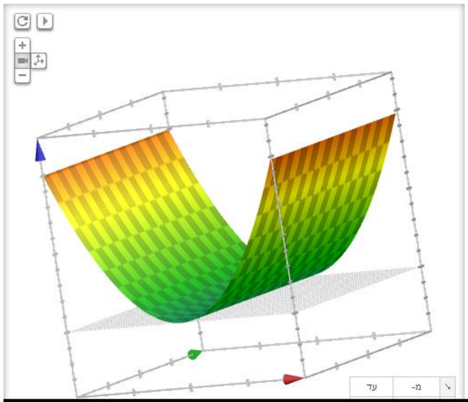
$$f(x,y) = -x^2 - y^2$$

$a = (0,0)$ נקודת max ממש

(3

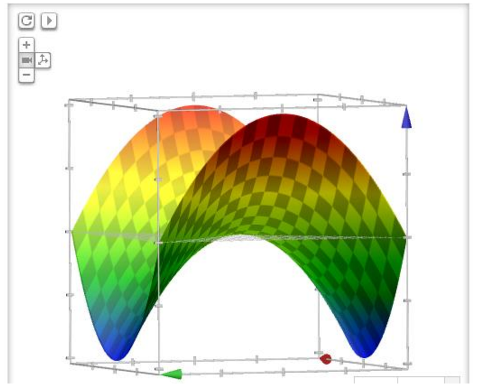
$$f(x,y) = x^2$$

$a = (0,0)$ min לא ממש. $f(x,y) \geq f(0,0)$



4) $f(x,y)=x^2-y^2$

$f(x,0)>f(0,0)$
$f(0,y)<f(0,0)$



לנקודה כזאת קוראים נקודת אוכף Saddle point

הגדרה

אם f דיפ' $f:U\to\mathbb{R}$ בנקודה a ומתקיים $\forall j\ :\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=0$ אז a נקרא נקודה קריטית $(\nabla f(a)=0)$

משפט (תנאי הכרחי לקיצון מקומי)

$f:\Omega\to\mathbb{R}$. $a\in\mathring{\Omega}$. אם a נקודת קיצון ו f דיפ' בנקודה a אזי a נקודה $\nabla f(a)=0$.

הוכחה

a נקודת min (WLOG ב.ה.כ)

$$\exists\delta>0\ :\ B(a,\delta)\subset\Omega$$

$$\forall \mathrm{x}\in B(a,\delta): f(x)\geq f(a)$$

ניקח $j=1\ldots.n$ ונגדיר $\varphi(t)\coloneqq f(a+te_j)$

$$|t|<\delta : f(a)\leq f\left(a+te_j\right)=\varphi(t)$$

$t=0$ נק' מינימום ל$\varphi(x)$ ולכן לפי למה $Fermat$ $\varphi'(0)=0$

$$0=\frac{d}{dt}|_{t=0}f\left(a+te_j\right)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

משמעות גאומטרית

משוואה של מישור משיק לגרף

$$T_{(a,f(a))}\left(\Gamma_f\right):\ x_{n+1}-a_{n+1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\left(x_j-a_j\right)$$

$$a_{n+1}=f(a)$$

אם a נקודת קיצון אז $T_{(a,f(a))}\left(\Gamma_f\right):\ x_{n+1}-a_{n+1}=0 : x_{n+1}=a_{n+1}$

כלומר מישור מקביל לציר x_{n+1}.

דוגמא

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

תנאי מספיק לקיצון מקומי

דיפרנציאל שני

$$d^2 f_a(h) := \frac{d^2}{dt^2}|_{t=0} f(a+th)$$

$$\frac{d}{dt} f(a_1 + th_1, \dots, a_n + th_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)h_i$$

$$\frac{d^2}{dt^2}|_{t=0} f(a+th) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_j h_i$$

$$f \in C^2(U) \quad : \quad d^2 f_a(h) = \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial_j}(a)h_i h_j$$

תבניות ריבועיות Quadratic Forms

הגדרה (תבנית ריבועית)

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\, h_i h_j$$

$a_{ij} = a_{ji}$ כי ניתן לסדר אותם באופן הבא:

$$Q(h) = \cdots a_{ij}h_i h_j + \cdots + a_{ji}h_j h_i + \cdots$$
$$a_{ij}h_i h_j + a_{ji}h_j h_i = \left(\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right)h_i h_j + \left(\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right)h_j h_i$$

אזי $Q(h) = \langle Ah, h \rangle$

הגדרה

אומרים כי תבנית ריבועית Q חיובית אם $\forall h \in \mathbb{R}^n : Q(h) \geq 0$. נסמן $Q \geq 0$

דוגמא

$$Q(h) = h_1^2 + \cdots + h_n^2 \quad A = I \quad Q(h) \geq 0$$

מסקנה

תהי $Q(h)$, המטריצה A של התבנית מקיימת $A^T = A$

הגדרה

Q חיובית ממש אם $\forall h \in \mathbb{R}^n - \{0\} : Q(h) > 0$. נסמן $Q > 0$

דוגמא

$$Q(h_1, h_2) = h_1^2 \quad Q \geq 0 \;\; Q \not> 0$$

הגדרה

התבנית Q נקראת לא שומרת סימן (לא מוגדרת Indefinite) אם $Q \not< 0 \wedge Q \not> 0$ כלומר $\exists h_+ . h_-$ כך ש

$$Q(h_+) > 0, Q(h_-) < 0$$

דוגמא

$$n = 2$$

$$Q(h_1, h_2) = h_1^2 - h_2^2$$
$$Q(1,0) > 0 \quad Q(0,1) < 0$$

הרצאה 15

$$Q(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$
$$a_{ij}=a_{ji}$$
$$A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$$
$$A=A^T$$

$$Q(x)=\langle Ax,x\rangle$$
$$A>0\Leftrightarrow \mathrm{Q}>0$$
$$A\geq 0\Leftrightarrow Q\geq 0$$
$$A<0\Leftrightarrow Q<0$$
$$A\leq 0\Leftrightarrow Q\leq 0$$

מחקר לסימן של מטריצה או תבנית ריבועית

מטריצה אורטוגונלית

$$\mathrm{UU}^{\mathrm{T}}=U^TU=I$$
$$U^T=U^{-1}$$
$$\langle Ux,Uy\rangle=\langle x,U^TUy\rangle=\langle x,y\rangle$$
$$\left|\left|Ux\right|\right|^2=\langle Ux,Ux\rangle=\langle x,x\rangle=\left|\left|x\right|\right|^2$$
$$\left|\left|\mathrm{U}x\right|\right|=\left|\left|x\right|\right|$$

משפט

לכל מטריצה $A=A^T$ קיימת מטריצה אורטוגונלית U כך ש:

$$UAU^{-1}=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\ 0\ 0\ \dots\ 0\\ 0\ \lambda_2\ 0\ \dots\ 0\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ ..\\ 0\ 0\ \dots\ \dots\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

λ_j ע"ע, $e_j=(0,0,\dots,1,\dots 0)$

$$UAU^{-1}e_j=\Lambda e_j=\lambda_je_j\Rightarrow AU^{-1}e_j=\lambda_j\left(U^{-1}e_j\right)$$

משפט

תהי $Q(x)=\langle Ax,x\rangle$ $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ע"ע של A, אזי:

$$\lambda_1,\dots,\lambda_n>0\Leftrightarrow Q>0$$
$$\lambda_1,\dots,\lambda_n\geq 0\Leftrightarrow Q\geq 0$$
$$\lambda_1,\dots,\lambda_n<0\Leftrightarrow Q<0$$
$$\lambda_1,\dots,\lambda_n\leq 0\Leftrightarrow Q\leq 0$$

הוכחה

$$\exists U \in O(n) : UAU^{-1} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1\ 0\ 0 \dots 0 \\ 0\ \lambda_2\ 0 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots .. \\ 0\ 0 \dots \dots \lambda_n \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}^r : Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle U^{-1}\Lambda Ux, x \rangle = \langle \Lambda Ux, Ux \rangle$
$\mathrm{U}x \coloneqq x'$
$Q(x) = \langle \Lambda x', x' \rangle = \lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_n (x_n')^2$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x' \rangle > 0 \Leftrightarrow Q(x) > 0$$
$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x' \rangle \geq 0 \Leftrightarrow Q(x) \geq 0$$
$$\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x' \rangle < 0 \Leftrightarrow Q(x) < 0$$
$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x' \rangle \leq 0 \Leftrightarrow Q(x) \leq 0$$

A לא שומרת סימן $\Leftrightarrow \det A < 0$

קריטריון של *Silvester*

$$A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$$
$$\Delta_k = \det\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{k}$$

אם $\Delta_1, \dots, \Delta_n > 0$ אז $A > 0$

אם $\forall k = 1, \dots, n : (-1)^k \Delta_k > 0$ אזי $A < 0$ $\quad (\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \dots)$

דיפרנציאל שני

$$d^2 f_a(h) = Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$
$$f \in C^2(U) \;;\quad U \subset\circ \mathbb{R}^n \quad;\quad a \in U$$

משפט

אם תבנית ריבועית $Q > 0$ אז קיים $C > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $Q(x) \geq C\|x\|^2$

הוכחה

1. Q – רציפה לפי משפט Weierstrass
2. $\min_{\|x\|=1} Q(x) = Q(x_0), \|x_0\| = 1$

נסמן $C = Q(x_0) > 0$

ניקח $x \in \mathbb{R}^n$, אם $x = 0$ אזי $\mathrm{Q}(0) = 0$

אם $x \neq 0$ אזי $x' := \frac{x}{\|x\|}$ כאשר $\|x'\| = 1$ ולכן $Q(x') \geq Q(x_0) = C$

$\frac{Q(x)}{\|x\|^2} = Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq C$ ולכן $Q(x) \geq C\|x\|^2$

עוד הוכחה

$UAU^{-1} = \Lambda$

$$Q(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle U^{-1}\Lambda Ux, x\rangle = \langle \Lambda Ux, Ux\rangle = \{x' = Ux\} = \langle \Lambda x', x'\rangle = \lambda_1 (x_1')^2 + \cdots + \lambda_n (x_n')^2$$
$$\geq \lambda_{min}\|x'\|^2 = \lambda_{min}\|x\|^2$$
$$\mathrm{Q} > 0 \Rightarrow C := \lambda_{min} > 0$$
$$\mathrm{Q}(x) \geq C\|x\|^2$$

משפט

תהי פונ' $f: U \to \mathbb{R}$ $\quad U \subset\circ \mathbb{R}^n \quad f \in C^2(U)$

תהי $a \in U$ נקודה קריטית, כלומר $\nabla f(a) = 0$

1. אם $d^2 f_a > 0$ אז a נקודת מינימום מקומי ממש.
2. אם $d^2 f_a < 0$ אז a נקודת מקסימום מקומי ממש.
3. אם $d^2 f_a$ לא מוגדרת סימן אז a לא נקודת קיצון.

הוכחה

1. $Q := d^2 f_a > 0$

לפי המשפט הקודם קיים $C > 0$ כך ש$\forall h \in \mathbb{R}^n: Q(h) \geq C\|h\|^2$

נוסחת טיילור מסדר 2 סביב נקודה a:

$$f(x) = f(a) + df_a(x-a) + \frac{1}{2} d^2 f_a(x-a) + \epsilon(x-a)\|x-a\|^2$$
$$df_a(x-a) = \langle \nabla f(a), x-a\rangle = 0$$

$$f(x)-f(a)=\frac{1}{2}d^2f_a(x-a)+\epsilon(x-a)\left||x-a|\right|^2=\frac{1}{2}Q(x-a)+\epsilon(x-a)\left||x-a|\right|^2$$
$$\geq\frac{1}{2}C\left||x-a|\right|^2+\epsilon(x-a)\left||x-a|\right|^2$$

$$f(x)-f(a)\geq\left||x-a|\right|^2\left(\frac{1}{2}C+\epsilon(x-a)\right)$$

$$\exists\delta>0\ :\ \ \left||x-a|\right|<\delta\Rightarrow|\epsilon(x-a)|<\frac{1}{4}C$$

לכל x בתחום מתקיים:

$$\left||x-a|\right|<\delta\Rightarrow f(x)-f(a)\geq\frac{1}{4}C\left||x-a|\right|\underset{x\neq a}{>}0$$
$$\forall x\in U\cap B_\delta(a),x\neq 0: f(x)-f(a)>0$$

ולכן a נק' מינימום ממש.

2. נחליף f ל $-f$.
3. נניח כי Q לא שומרת סימן.

$$\exists h_+\in\mathbb{R}^n: Q(h_+)>0$$
$$\exists h_-\in\mathbb{R}^n: Q(h_-)<0$$

$$f(a+th_\pm)=f(a)+df_a(th_\pm)+\frac{1}{2}d^2f_a(th_\pm)+\epsilon(th_\pm)\left||th_\pm|\right|^2$$

$$f(a+th_\pm)-f(a)=\frac{1}{2}Q(th_\pm)+\epsilon(th_\pm)\left||th_\pm|\right|^2=\frac{1}{2}t^2Q(h_\pm)+|t|^2\epsilon(th_\pm)\left||h|\right|^2=$$
$$=t^2\left(\frac{1}{2}Q(h_\pm)+\epsilon(th_\pm)\left||h_\pm|\right|^2\right)$$

a. $Q(h_+)>0$

$$\exists\delta>0:|t|<\delta\Rightarrow\left|\epsilon(th_\pm)\left||h_\pm|\right|^2\right|<\frac{1}{4}Q(h_+)$$

אז אם $|t|<\delta$ אזי $f(a+th_+)-f(a)\underset{t\neq 0}{>}0$

b. $Q(h_-)<0$

$$\exists\delta'>0:\left|\epsilon(th_-)\left||h_-|\right|^2\right|<\frac{1}{4}|Q(h_-)|\Rightarrow\frac{1}{2}Q(h_-)+\epsilon(th_-)\left||h|\right|^2<0$$
$$f(a+th_-)-f(a)<0$$

ולכן a לא נקודת קיצון.

משמעות גאומטרית

$$f(x)=f(a)+\sum\lambda_j\left(x_j-a_j\right)^2+o\left(\left||x-a|\right|^2\right)$$

$\lambda_j>0$ אז עבור a, x_j היא נקודת מינימום.

$\lambda_j<0$ אז עבור a, x_j היא נקודת מקסימום.

דוגמא

$\lambda*\mu>0;\ \ f(x,y)=f(a)+\lambda x^2+\mu y^2+o(x^2+y^2)$ יש קיצון.

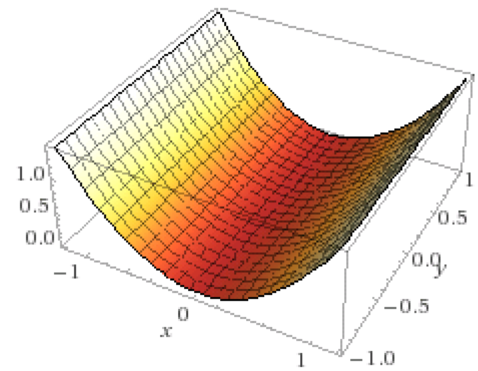
$\lambda*\mu<0$ אז אין קיצון (אוכף).

דוגמא

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

$\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n = 0 \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ אי אפשר להחליט

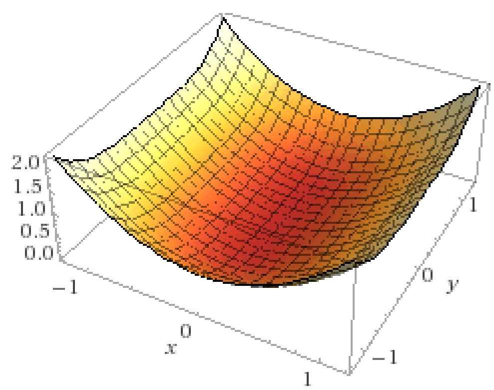
$f(x,y) = x^2$



$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$

$a = (0,0)$ נקודת מינימום לא ממש.

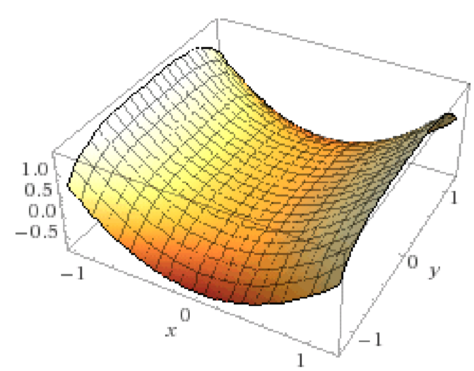
$f(x,y) = x^2 + \epsilon y^4$



$(0,0)$ מינימום ממש.

$f(x,y) = x^2 - \epsilon y^4$

$f(x,0) > 0 \quad x \neq 0$
$f(0,y) < 0 \quad y \neq 0$



$(0,0)$ אוכף.

מחקר לקיצון

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

1) נקודות קריטיות

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0 \end{cases}$$

a נקודה קריטית.

$$n = 2$$
$$f'_x(a) = f'_y(a) = 0$$
$$H = \begin{pmatrix} f'_{xx} & f'_{xy} \\ f_{yx} & f'_{yy} \end{pmatrix}$$

$\det H < 0 \Rightarrow$ נקודת אוכף a

דוגמא

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

$$y^4 - y = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0), (1,1)$$

נקודות קריטיות: $a = (0,0), b = (1,1)$

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H = -2 < 0$$

$(0,0)$ נקודת אוכף.

$$H_f(b) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\Delta_1 = 6 > 0$$
$$\Delta_2 = 36 - 9 > 0$$

$d^2 f_b > 0$ ולכן b נקודת מינימום מקומי.

הרצאה 16

פונקציה סתומה Implicit Function

$$ax + by = 0$$
$$F(x,y) \coloneqq ax + by = 0$$
$$y = -\frac{a}{b}x =: \varphi(x) \quad ; \quad b \neq 0$$
$$ax = 0 \quad ; \quad b = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = b$$

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

סימון

נסמן:

$$\underset{(x,y)\in}{\mathbb{R}^{n+1}} = \underset{x\in}{\mathbb{R}^n} \times \underset{y\in}{\mathbb{R}}$$

משפט

תהי $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} \subset_\circ \mathbb{W}$. נתונה $F: \mathbb{W} \to \mathbb{R} ; F \in C^r(\mathbb{W})$

נתונה הנקודה $(a,b) \in W$ כך ש $F(a,b) = 0$

נניח $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$

אזי קיימות סביבות ב$a \in U, b \in V$ כך ש

$$\forall x \in U \quad \overset{\text{קיים ויחיד}}{\exists!} \quad y \in V \;\; \mathrm{F}(x,y) = 0$$

נסמן $\varphi: U \to V \quad y = \varphi(x)$ ו$\varphi \in C^r(U)$

הוכחה

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0 \quad ; \quad WLOG \quad \frac{\partial F}{\partial y} > 0$$

$\frac{\partial F}{\partial y}$ – רציפה ב(a,b) ולכן

$$\exists B_{(a,b)}(\epsilon): \forall (x,y) \in B_{(a,b)}(\epsilon) \;\; \frac{\partial F}{\partial b}(x,y) > 0$$

סביבות $\exists U' \ni a, V' \ni b$ כך ש$U' \times V' \subset B_{(a,b)}(\epsilon)$

בפרט $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(a,y) > 0$ כלומר $F(a,y) \nearrow$ ממש (לפי y).

$$V' = (b-\epsilon, b+\epsilon)$$
$$y = b : F(a,b) = 0$$
$$y = b+\epsilon : F(a,b+\epsilon) > 0$$
$$y = b-\epsilon : F(a,b-\epsilon) < 0$$

$F(x,b+\epsilon)$ רציפה ולכן $\exists U'' \ni a : F(x,b+\epsilon) > 0 \; \forall x \in U''$

$F(x,b-\epsilon)$ רציפה ולכן $\exists U''' \ni a : F(x,b-\epsilon) < 0 \; \forall x \in U'''$

נגדיר

$$U \coloneqq U' \cap U'' \cap U'''$$

נקבע $x \in U$

לפי הבניה $F(x,b-\epsilon) < 0 \, , F(x,b+\epsilon) > 0$

$F(x,y)$ – רציפה לפי y אם x קבוע.

$F(x,b-\epsilon) < 0, F(x,b+\epsilon > 0)$ ולכן לפי משפט קושי על ערך בינוני $\exists y : F(x,y) = 0$

אבל $F(x,*) \nearrow$ ולכן y הוא יחיד.

$$y \in (b-\epsilon, b+\epsilon) = V \;\; ; \;\; y = \varphi(x), x \in U$$

1) צ"ל φ רציפה בנקודה (a,b), כלומר צ"ל:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \; \forall x \in B(a,\delta) \subset U : \varphi(x) \in (b-\epsilon, b+\epsilon)$$

ניקח $U \times (b-\epsilon, b+\epsilon)$ ולפי הבנייה $\exists U' \subset U$

$$x \in U' \Rightarrow y \in (b-\epsilon, b+\epsilon)$$
$$U' = B(a,\delta)$$
$$y = \varphi(x)$$
$$\forall x \in B(a,\delta) \Rightarrow \varphi(x) \in (\varphi(a)-\epsilon, \varphi(a)+\epsilon)$$

ולכן φ רציפה.

2) $\varphi \in C^r(U)$

נכתוב נוסחת טיילור ל-F בנקודה (a, b) עם סדר 0 עם שארית $Lagrange$.

$$F(x_1,\dots,x_n,y) = F(a,b) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)(x_j - a_j) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(y-b)$$

עבור $0 < \theta < 1 \;\; ; \;\; \xi = (a.b) + \theta\big((x,y) - (a,b)\big)$

$$y = \varphi(x); \quad b = \varphi(a)$$
$$F(a,b) = 0$$
$$x \in U \ni a \, ; F\big(x, \varphi(x)\big) = 0$$

$$0 = 0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)(x_j - a_j) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)\big(\varphi(x) - \varphi(a)\big)$$

$$x = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots a_n)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi)(x_k - a_k) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)\big(\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a)\big)$$

$$\frac{\varphi(a_1,\dots,x_k,\dots,a_n)-\varphi(a_1,\dots,a_n)}{x_k-a_k}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x),\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)\neq 0\ \ \forall\left|\left|x-a\right|\right|<\delta$$

$$x\to a\Rightarrow \varphi(x)\to b=\varphi(a)$$

$$\big(x,\varphi(x)\big)-(a,b)\underset{x\to a}{\longrightarrow}0$$

ולכן $\xi\underset{x\to a}{\longrightarrow}(a,b)$

$$\frac{\varphi(a_1,\dots,x_k,\dots,a_n)-\varphi(a_1,\dots,a_n)}{x_k-a_k}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\big(a+\theta(x-a),b+\theta(\varphi(x)-b)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a+\theta(x-a),b+\theta(\varphi(x)-b)}$$

$$\lim_{x_k\to a_k}\frac{\varphi(a_1,\dots,x_k,\dots,a_n)-\varphi(a_1,\dots,a_n)}{x_k-a_k}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}$$

$$\exists\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(a)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0\ \forall x\in U_a,y\in V_b$$

אז לכן אפשר להחליף (a,b) ל$\big(x,\varphi(x)\big)$

ולכן

$$\boxed{\begin{matrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\big(x,\varphi(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,\varphi(x)\big)}\\ x\in U_a\end{matrix}}_{k=1,\dots,n}$$

$$\varphi\in C^r(U)?$$

$\varphi,\frac{\partial F}{\partial x_j}$ רציפות ולכן $-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))}$ רציפה בU

ולכן $x\in U,k=1,\dots,n$; $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)$ רציפות ולכן $\varphi\in C^1(U)$

נניח כי $\varphi\in C^k(U)$: $k<r$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k},\frac{\partial F}{\partial y},\varphi\in C^k(U)\Rightarrow-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\big(x,\varphi(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,\varphi(x)\big)}\in C^k(U)$$

ולכן

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \in C^k(U) \;\; k = 1, .., n \Rightarrow \varphi \in C^{k+1}(U)$$

ולכן לפי אינדוקציה $\varphi \in C^r(U)$

גזירות של פונקציה סתומה

$$F\big(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\big) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}: \quad \frac{\partial F}{\partial x_k}\big(x, \varphi(x)\big) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(x, \varphi(x)\big)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}\big(x, \varphi(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, \varphi(x)\big)}$$

$$F(x_1, .., x_n, y) = 0$$

אלגוריתם:

1) $F(a, b) = 0$

2) $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$y = \varphi(x), x \in U_a$$

תרגיל

$$z^3 - xz + y = 0$$

1) $x = 3, y = -2, z = z(x, y)$

2) $\frac{\partial z}{\partial x}(3, -2) =?$

1) $F(x, y, z) = z^3 - xz + y = 0$

$$F(3, -2, 2) = 8 - 6 - 2 = 0$$

2) $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - x\Big|_{\substack{x=3\\ y=-2\\ z=2}} = 3 * 4 - 3 = 9 \neq 0$

ולכן קיימת פונקציה יחידה $z = z(x, y) \in C^\infty(U \times V)$

$$(3, -2) \in U \,;\, v = (2 - \epsilon, 2 + \epsilon) \,;\; z(3, -2) = 2$$

$$z(x, y)^3 - xz(x, y) + y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}: \;\; 3z^2 z'_x - z - xz'_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}: 3z^2 z'_y - xz'_y + 1 = 0$$

$$3 * 4 * z'_x(3, -2) - 2 - 3z'_x(3, -2) = 0 \Rightarrow z'_x(3, -2) = \frac{2}{9}$$

$$3 * 4 * z'_y(3, -2) - 3z'_y(3, -2) + 1 = 0 \Rightarrow z'_y(3, -2) = -\frac{1}{9}$$

הרצאה 17

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{cases}$$

מקרה ליניארי

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}+b_{11}y_1+\dots+b_{1m}y_m=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n+b_{m1}y_1+\dots+b_{mm}y_m=0 \end{cases} \Rightarrow j=1\dots m: y_j=\varphi(x_1,\dots,x_m)$$ ליניאריות

$$\det\left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}\neq 0$$

משפט על פונ' סתומה כללית

משפט

תהי $\mathbb{W}\subset\circ\ \mathbb{R}^{n+m}=\underset{x\in}{\mathbb{R}^n}\times\underset{y\in}{\mathbb{R}^m}$

$$(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}\Rightarrow x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m$$

תהי $F:\mathbb{W}\to\mathbb{R}^m; F\in C^r(\mathbb{W}), r\geq 1$

1) תהי $(a,b)\in\mathbb{W}$ כך ש$F(a,b)=0$

2) נניח כי $\det\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b)\dots\frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b)\dots\frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b)\end{pmatrix}\neq 0$

אזי קיימות סביבות $U\ni a, V\ni b$ כך ש $\forall x\in U\ \exists!\, y\in V: F(x,y)=0$

הפונקציה $y:=\varphi(x), x\in U; \varphi\in C^r(U)$

הסבר

$$M:=\{(x,y)\in\mathbb{W}: F(x,y)=0\}$$

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{i,j=1}^{m}\neq 0$$

אזי $\exists U,V$ כך ש$M\cap(U\times V)$ גרף של $y=\varphi(x)$

לדוגמא עבור $F(x,y)=xy\ m=1$

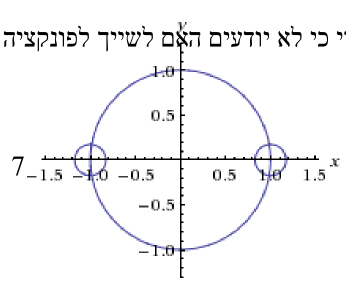
$$F(x,y)=xy=0$$

$$x=a\neq 0\Rightarrow y=0; \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=x$$

כלומר המשפט לא מתקיים עבור $x=0$.

או לדוגמא $F(x,y)=x^2-y^2-1=0$

בחיתוך עם צירים אין גרף אפשרי כי לא יודעים האם לשייך לפונקציה העליונה או התחתונה, $\frac{\partial F}{\partial y}(\pm1,0)=0$



סימון
Jacobian

$$Jacobian - \det J_f(x)\,;\;\; f: U \to \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x) := \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} = \det J_f(x)$$

ניתן לרשום את תנאי 2 כך:

$\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}(a,b) \neq 0$ (2

הוכחה של המשפט
אינדוקציה לגבי m

$m=1$ הוכחנו, נניח כי המשפט נכון עבור $m-1$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) \dots \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b) \dots \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b) \end{pmatrix} \neq 0$$

WLOG : $\Delta_{m-1} \neq 0$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) \dots \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}(a,b) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1}(a,b) \dots \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}}(a,b) \end{pmatrix} \neq 0$$

מערכת:

$$\begin{cases} F_1\left(\underbrace{x_1,\dots,x_n}, \overline{y_1,\dots,y_{m-1}}, \underbrace{y_m}\right) = 0 \\ \vdots \\ F_{m-1}\left(\underbrace{x_1,\dots,x_n}, \overline{y_1,\dots,y_{m-1}}, \underbrace{y_m}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(F_1,\dots,F_{m-1})}{\partial(y_1,\dots,y_{m-1})}(a,b) \neq 0$$

לפי הנחה של אינדוקציה

$\exists U \ni (a,b_m), V \ni (b_1,\dots,b_{m-1})$ כך ש:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1,\dots,x_n,y_m) \\ \vdots \\ y_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1,\dots,x_n,y_m) \end{cases}$$
$$(x,y_m) \in U\,,\, y' := (y_1,\dots,y_{m-1}) \in V$$

$$\varphi_j \in C^r(U)$$
$$F_j(x,\varphi_1(x,y_m),\dots\varphi_{m-1}(x,y_m),y_m) = 0; 1 \le j \le m-1 \quad ; \quad (x,y_m) \in U$$

$$\frac{\partial}{\partial y_m}:(*)\boxed{\frac{\partial F_j}{\partial y_1}(a,b)\frac{\partial \varphi_1}{y_m}(a,b_m) + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}}(a,b)\frac{\partial \varphi_{m-1}}{y_m}(a,b_m) + \frac{\partial F_j}{\partial y_m}(a,b) = 0}$$

נתבונן במשוואה

$$G(x,y_m)=F_m(x,\varphi_1(x,y_m),\dots\varphi_{m-1}(x,y_m),y_m)$$

משוואה! $G=0$

$$x=(x_1,\dots,x_n)$$

1) $0=F_m(a,b)=F_m(a,\varphi_1(a,b_m),\dots,\varphi_{m-1}(a,b_m),b_m)=F(a,b_1,\dots,b_{m-1},b_m)=G(a,b_m)=0$

2) $\frac{\partial G}{\partial y_m}(a,b_m)\overset{?}{\neq}0$

נניח כי $\frac{\partial G}{\partial y_m}(a,b_m)=0$

$$(**)\boxed{0=\frac{\partial G}{\partial y_m}(a,b_m)=\frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_m}(a,b_m)+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}(a,b)\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y_m}(a,b_m)}$$

בצורה וקטורית, לפי $(**),(*)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(a,b)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_m}(a,b_m)+\dots+\frac{\partial F}{\partial y_{m-1}}(a,b)\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y_m}(a,b_m)+\overset{\text{מקדם}=1}{\frac{\partial F}{\partial y_m}}(a,b)=0\Rightarrow\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}=0-\text{סתירה}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_m}(a,b_m)\neq0$$

$G(a,b_m)=0$ לפי משפט למקרה $m=1$

$$F_m(x,\varphi_1(x,y_m),\dots,\varphi_{m-1}(x,y_m),y_m)=0=G(x,y_m)\Rightarrow y_m=\varphi_m(x):x\in U_a,y\in V_b$$

$$\exists U'_a,V'_b:\begin{cases}y_1=\varphi_1(x_1,\dots,x_n,y_m)=\varphi_1\big(x_1,\dots,x_n,\varphi_m(x_1,\dots,x_n)\big)\\ \vdots\\ y_{m-1}=\varphi_{m-1}\big(x_1,\dots,x_n,\varphi_m(x_1,\dots,x_n)\big)\\ y_m=\varphi_m(x_1,\dots,x_n)\end{cases}$$

בסביבה $U'_a\times V'_b\ni(a,b)$

$$\Psi(x):\begin{cases}y_1=\Psi_1(x_1,\dots,x_n)\\ \dots\\ y_{m-1}=\Psi_{m-1}(x_1,\dots,x_n)\\ y_m=\varphi_m(x_1,\dots,x_n)\end{cases}\Rightarrow y=\Psi(x):(x,y)\in U'_a\times V'_b$$

תרגילים

1) $\begin{cases}xe^{u+v}+2uv=1\\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x\end{cases}$

הוכח כי $u=u(x,y)\,,v=(x,y),u,v\in C^\infty$ כך ש $u(1,2)=v(1,2)=0$

$$(x,y)\in U_{(1,2)};(u,v)\in V_{(0,0)}\quad;\quad a=(1,2)\quad b=(0,0)$$

א) $\begin{cases}1e^{0+0}+2*0*0=0\\ 2e^{0-0}-\frac{0}{1+0}=2\end{cases}\Rightarrow F(a,b)=0$

ב) $\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_1,x_2)}(1,2,0,0)=\det\begin{pmatrix}xe^{u+v}+2v & xe^{u+v}+2u\\ ye^{u-v}-\frac{1}{1+v} & -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2}\end{pmatrix}\Big|_{\substack{x=1\\y=2\\u=0\\v=0}}=\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}=-3\neq0$

אין פתרון אנליטי אבל יש פתרון.

מה אם הנגזרות?

לפי המשפט הכללי $F(x,y)=0\,,y=\varphi(x)\Rightarrow F\big(x,\varphi(x)\big)\equiv0\ x\in U_a$

כלל שרשרת:

$$dF_x\big(x,\varphi(x)\big) + dF_y\big(x,\varphi(x)\big) \circ d\varphi_x(x) \equiv 0$$
$$d\varphi_x(x) = -\big[dF_y\big(x,\varphi(x)\big)\big]^{-1} \circ dF_x\big(x,\varphi(x)\big)$$
$$J_\varphi(x) = -\big[JF_y\big(x,\varphi(x)\big)\big]^{-1} J_F\big(x,\varphi(x)\big)$$
$$J_\varphi(a) == -\big[JF_y(a,b)\big]^{-1} J_F(a.b)$$

ובתרגיל שלנו:

$$\frac{\partial}{\partial x} : e^{u+v} + xe^{u+v}(u'_x + v'_x) + 2(u'_x v + uv'_x) = 0$$
$$ye^{u-v}(u'_x - v'_x) - (u' \frac{1}{1+v} + u \frac{-v'_x}{(1+v)^2} = 2$$
$$u'_x(1,2) = ? \Rightarrow 1 + (u'_x + v'_x) = 0$$
$$2(u'_x - v'_x) - u'_x = 0 \Rightarrow v'_x(1,2) = -1, u'_x(1,2) = 0$$

הרצאה 18

משפט על פונקציה הפוכה Inverse Function

$n = 1$
$f: (a, b) \to \mathbb{R}$
$f \in C^1(a, b)$
$f'(x) \neq 0$

הגדרה

$U, V \subset\circ \mathbb{R}^n$

אומרים כי $\varphi: U \to V$ C^r-דיפאומורפיזם אם:

1) φ חח"ע "1-1"
2) φ על : $\varphi(U) = V$
3) $\varphi \in C^r(V), \varphi^{-1} \in C^r(U)$

אומרים כי U, V C^r-דיפאומורפים אם קיים C^r-דיפאו' ביניהם.

הגדרה

$F, G \subset \mathbb{R}^n$ דיפאומורפים אם לכל $U, V \subset\circ \mathbb{R}^n$ כך ש$F \subset U, G \subset V$ קיימות $U_0 \subset\circ U, V_0 \subset\circ V$ כך ש $V_0 \sim U_0$ ($F \subset U_0. G \subset V_0$).

משפט (על פונ' הפיכה)

$U, V \subset\circ \mathbb{R}^n, f: U \to V, f \in C^r(U), r \geq 1, a \in U$

נניח כי $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) \neq 0$ אז קיימות סביבות $a \in U_0, f(a) = b \in V_0$ כך ש:

$\forall y \in V_0 \exists! x \in U_0 ; x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$
$f^{-1} \in C^r(V_0), f^{-1}: V_0 \to U_0$

הוכחה

$W := U \times V$
$F(x, y) := y - f(x)$
$F: W \to \mathbb{R}^n ; F \in C^r(W)$
$F(x, y) = 0$

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(\mathrm{x}_1, \dots, x_n)}(a, b) = -\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) \neq 0$$

לפי משפט על פונ' סתומה:

$$\exists \underset{a\in}{U_0}, \underset{b\in}{V_0} \subset\circ \mathbb{R}^n : \forall y \in V_0 \exists! x \in U_0 : y - f(x) = F(x, y) = 0$$
$$y \to x = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1} C^r(V_0)$$

מסקנה 1:

$$f \in C^r(U); U \subset\circ \mathbb{R}^n \,; a \in U$$

$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x) \neq 0$ $\forall x \in U$ אזי $f(U)$ קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}^n$

הוכחה

ניקח $y_0 \in f(U)$ אזי $\exists x_0 \in U : f(x_0) = y$

לפי משפט על פונ' הפיכה : $\exists x_0 \in U_0 \subset U, y_0 \in V_0 \subset \mathbb{R}^n$ כך שלכל $y \in V_0$ קיים ויחיד

$x \in U_0 \subset U: f(x) = y$ ולכן $y \in f(U)$ אז $V_0 \subset f(U)$

קיבלנו $\forall y_0 \in f(U) \exists V_0 \subset \mathbb{R}^n : V_0 \subset f(U)$ ולכן $f(U)$ קבוצה פתוחה

מסקנה 2:

אם $f: U \to V$ $\forall x \in U: \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x) \neq 0$ אז f דיפאומורפיזם מקומי, כלומר לכל $a \in U, b \in V$ קיימות סביבות $a \ni U_a, b \ni V_b$ כך ש$f: U_a \to V_b$ היא C^r-דיפאמורפיזם.

דוגמא

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,.,.,x_n)}(x) \neq 0 \nRightarrow f \text{ דיפאומורפיזם}$$

$$f(x_1,x_2) = (e^{x_1}\cos x_2 \,, e^{x_1}\sin x_1)$$

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)} = e^{2x_1} \neq 0$$

$$f(x_1,x_2+k\tau) = f(x_1,x_2+2k\pi) = f(x_1,x_2)$$

מטריצת יעקובי על פונ' הפוכה

$$f: U \to V$$

$$f \in C^r(U); U,V \subset\circ \mathbb{R}^n$$

$$a \in U, b = f(a) \,; \frac{\partial(f_1,.,.,f_n)}{\partial(x_1,.,.,x_n)}(a) \neq 0$$

$$\exists f^{-1}: V_b \to U_a \,; f^{-1}\big(f(x)\big) = x \in U_a$$

כלל השרשרת

$$J_{f^{-1}}\big(f(a)\big) J_f(a) = I$$

$$\boxed{J_{f^{-1}}(b) = \big(J_f(a)\big)^{-1}}$$

$$d_{f^{-1}}\big(f(a)\big) \circ df(a) = I$$

$$\boxed{df_b^{-1} = (df_a)^{-1}}$$

$$\boxed{\frac{\partial(f_1^{-1},\dots,f_n^{-1})}{\partial(y_1,.,.,y_n)}(b) = \frac{1}{\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots x_n)}(a)}}$$

משפט

$$U \subset\circ \mathbb{R}^n \,; f: U \to \mathbb{R}^n \,, f \in C^r(U), r \geq 1$$

נניח כי $\forall x \in U \, \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x) \neq 0$

אז $f(U)$ קבוצה פתוחה

אם f חח"ע אז $f: U \to f(U)$-C^r-דיפאו'

תרגיל בסגנון מבחן

$$f_1(x,y,z) = e^{2y} + e^{2z}$$
$$f_2(x,y,z) = e^{2x} - e^{2z}$$
$$f_3(x,y,z) = x - y$$
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

1) יעקוביאן:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2e^{2y} & 2e^{2z} \\ 2e^{2x} & 0 & -2e^{2z} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -4e^{2y+2z} - 4e^{2x+2z} < 0$$

2) $f(x,y,z) = f(x',y'z')$:

$$\begin{cases} e^{2y} + e^{2z} = e^{2y'} + e^{2z'} \\ e^{2x} - e^{2z} = e^{2x'} - e^{2z'} \\ \quad x - y = x' - y' \end{cases}$$

$$e^{2x} + e^{2y} = e^{2x'} + e^{2y'} \Rightarrow e^{2y}(e^{2x-2y} + 1) = e^{2y'}\left(e^{2x'-2y'} + 1\right) \Rightarrow y = y' \Rightarrow$$
$$x = x', z = z'$$

משטחים דיפרנציאליים ב$\mathbb{R}^n$

$ax + by - c = 0$ קו ב$\mathbb{R}^2$

$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{21}y + a_{23}z = d_2 \end{cases}$ קו $\mathbb{R}^3$ אם $rank(a_{ij}) = 2$

הגדרה

$$\Phi: U \to \mathbb{R}^m; U \subset\circ \mathbb{R}^n\ ; m \le n$$

אומרים כי Φ רגולרית בנקודה $a \in U$ אם $rank\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{m,n} = m$ (מקסימלי!).

a נקודה רגולרית.

הגדרה

$$W \subset\circ \mathbb{R}^n\ ; F: W \to \mathbb{R}^m, m \le n, F \in C^r(W)$$

הקבוצה $M = \{x \in W : F(x) = 0\}$ C^r-משטח אם כל נקודה בM רגולרית או אם F רגולרית בW

$$\dim M = n - m$$

$m = 1$ משטח על Hyperspace.

דוגמאות

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\} = S^2$$

$$W = \mathbb{R}^3, F \in C^\infty(W)$$
$$J_F(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

אם $rankJ_F(x, y, z) = 0$ אזי $x = y = z = 0$ אבל $(x, y, z) \notin S^2$ ולכן S^2-C^∞-משטח. $\mathrm{Dim}\, S^2 = 2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$x + y + z = 0$$

$$J_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rank\ J_F < 2 \Rightarrow (2x, 2y, 2z) = \lambda(1,1,1) \Rightarrow x = y = z = \frac{\lambda}{2}$$

$$x + y + z = 0 \Rightarrow (0,0,0) \notin M$$
$$\dim M = 3 - 2 = 1$$

הרצאה 19

הגדרה

יהיו $F,G\subset\mathbb{R}^n$. $F\sim G$ דיפאומורפי אם קיימות $U,V\Subset\mathbb{R}^n$ כך ש$F\subset U,G\subset V$ כך שקיים $\varphi:U\to V$ שהוא C^r-דיפאומורפיזם.

דוגמא

טורוס ב$\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2=1\\x_3^2+x_4^2=1\end{cases}$$

$$J_\Phi=\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2x_3 & 2x_4\end{pmatrix}$$

מישור משיק למשטח

M משטח, $W\Subset\mathbb{R}^n$.

$$M=\{x\in W:\Phi_1(x)=...=\Phi_m(x)=0\}$$

$\Phi=(\Phi_1,...,\Phi_m)$ רגולרית בM.

$r\geq 0$, $\Phi\in C^r(W)$ וקוראים לM C^r-משטח.

$\dim M=k=n-m$

נקבע $a\in M$

Φ רגולרית בa, כלומר:

$$rank\begin{pmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n}(a)\\\vdots & ... & \vdots\\\frac{\partial\Phi_n}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}=m$$

ולכן קיים מינור $\Delta_{m\times m}\neq 0$.

לפי משפט על פונ' סתומה:

$$a=\left(\underbrace{a_1,...,a_k}_{a'},\underbrace{a_{k+1},...,a_n}_{a''}\right)=(a',a'')$$

$$\exists U_{a'},V_{a''}\;:\;\forall x'\in U_{a'}\exists!x''\in V_{a''}\;:\;\Phi(x',x'')=0$$

$$x''=\varphi(x')$$

$(x_{k+1},...,x_n)=\varphi(x_1,..,x_k)$ כך ש$(x_1,..,x_k)\in U_{a'}$, $(x_{k+1},...,x_n)\in V_{a''}$.

$m=1$

$$\Phi(x_1,...,x_n)=0,a=\left(\underbrace{a_1,...,a_{n-1}}_{a'},\underbrace{a_n}_{a''}\right)$$

$\nabla\varphi(a)\neq 0$ רגולרית, $\nabla\varphi(a)=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(a)\right)\neq(0,0)$ כי $\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(a)\neq 0$, $\varphi(x_1,..,x_{n-1})=x_n$.

מישור משיק לגרף Γ_φ

$$\Gamma_\varphi=M\cap(U_{a'}\times V_{a''})$$

מישור משיק בנקודה a:

$$x_n-a_n=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(a')(x_j-a_j)$$

$\Phi(x_1,...,x_{n-1},\varphi(x_1,..,x_{n-1}))\equiv 0$, נגזור לפי x_j (כלל השרשרת):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(a)+\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(a)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(a')=0$$

$\Leftarrow \boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(a') = -\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(a)}{\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(a)}} \Leftarrow$

$$\Gamma_\varphi : x_n - a_n = \sum_{j=1}^{n-1}\left(-\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(a)}{\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(a)}\right)(x_j - a_j) \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) = -\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j)$$

$\boxed{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j) = 0}$ משוואה של מישור משיק $T_a(M)$.

גרף

$$\Phi(x_1, .., x_n) = f(x_1, ..., x_{n-1}) - x_n,\ x_n = f(x_1, ..., x_{n-1})$$

$$\begin{aligned} 1 \le j \le n-1 : \qquad & \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \\ j = n : \qquad & \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(x) = -1 \end{aligned}$$

$$\Phi = f(x_1, ..., x_{n-1}) - x_n \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j - a_j) - (x_n - a_n) = 0$$

משמעות גאומטרית

$$\begin{aligned} T_a(M) \quad &: \quad \langle \Phi(a), x - a\rangle = 0 \\ T_a(M) \quad &: \quad \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \Phi(a), x - a\rangle = 0\} \end{aligned}$$

דוגמאות

1.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - r^2 &= 0 \\ \nabla\Phi &= (x, 2y) \\ r &> 0 \end{aligned}$$

יהי $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ כך ש-$a_1^2 + a_2^2 = r^2$.

$T_a(a) : 2a_1(x - a_1) + 2a_2(y - a_2) = 0 \Leftarrow \nabla\Phi(a) = (2a_1, 2a_2)$

$$T_a(M) \quad : \quad a_1 x + a_2 y = r^2$$

2. $S^2 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ ספירה. $u = (x, y, z)$

$a \in S^2, \langle \nabla\Phi(a), u - a\rangle = 0$

$2a_1(x - a_1) + 2a_2(y - a_2) + 2a_3(z - a_3) = 0$

$a_1 x + a_2 y + a_3 z = a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 = 1$

$\Leftarrow T_a\left(S^2\right) : a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$

m - משוואות

$M=\{x\in W\ :\ \Phi_1(x)=...=\Phi_m(x)=0\}$

$\nabla\Phi_1(a),...,\nabla\Phi_m(a)$ בת"ל $\Leftarrow$ Φ רגולרית בנקודה $a\in M$.

בפרט, $\nabla\Phi_j(a)\neq 0$ ולכן

$$M=\bigcap_{j=1}^{m}\{x:\Phi_j(x)\}$$

$$\dim M=n-m=k$$

$$T_a(M)=\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ 1\le j\le m:\langle\nabla\Phi_j(a),x-a\rangle=0\}=\bigcap_{j=1}^{m}T_a(M_j)$$

סה"כ קיבלנו:

$$M=\{x\in W\ :\ \Phi_1(x)=...=\Phi_m(x)=0\}$$

$$\dim M=n-m,m\le n,\Phi\in C^r(W),r\ge 1$$

$$T_a(M)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ \exists i:\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j}(a)(x_j-a_j)=0\right\}$$

$$\dim T_a(M)=n-m=\dim M$$

$$T_a(M):\langle\nabla\Phi_j(a),x-a\rangle=0\Rightarrow(x-a)\perp\nabla\Phi_1(a),...,\nabla\Phi_m(a)$$

$$\boxed{N_a(M)=\operatorname{span}\{\nabla\Phi_1(a),...,\nabla\Phi_m(a)\}\ \text{מרחב נורמלי}}$$

$$N_a(M)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ x-a=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\nabla\Phi_j(a)\right\}$$

(האם $M_a\oplus T_a=\mathbb{R}^n$?)

דוגמא

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2&=1\\x_3^2+x_4^2&=1\end{aligned}$$

$M=T^2$ טורוס, $a=(a_1,..,a_4)$.

$$T_a(M)\ :\ \begin{array}{l}2a_1(x_1-a_1)+2a_2(x_2-a_2)=0\\2a_3(x_3-a_3)+2a_4(x_4-a_4)=0\end{array}\ :\ \begin{cases}a_1x_1+a_2x_2=1\\a_3x_3+a_4x_4=1\end{cases}$$

קיצונים על תנאי (עם אילוצים)

הגדרה

יהיה M C^r-משטח ב-$\mathbb{R}^n$. $M=\{x\in W\ :\ \Phi(x)=0\}$, $W\Subset\mathbb{R}^n$

תהי פונ' $f:M\to\mathbb{R}$

- אומרים ש$a\in M$ נקודת מינימום אם $\exists\epsilon>0\ :\ \forall x\in M\cap B(a,\epsilon)\ :\ f(x)\ge f(a)$
  - אומרים ש$a\in M$ מינימום ממש אם $\exists\epsilon>0\ :\ \forall x\in M\cap \underset{x\neq a}{B(a,\epsilon)}\ :\ f(x)>f(a)$
- אומרים ש$a\in M$ נקודת מקסימום אם $\exists\epsilon>0\ :\ \forall x\in M\cap B(a,\epsilon)\ :\ f(x)\le f(a)$
  - אומרים ש$a\in M$ מינימום ממש אם $\exists\epsilon>0\ :\ \forall x\in M\cap \underset{x\neq a}{B(a,\epsilon)}\ :\ f(x)<f(a)$

משפט

$W \Subset \mathbb{R}^n, f : W \to \mathbb{R}, f \in C^r(W), r \geq 1$

$M = \{x \in W \,:\, \Phi_1(x) = ... = \Phi_m(x) = 0\}$ C^r משטח.

אם $a \in M$ נקודת קיצון מקומי עם התנאי $\Phi(x) = 0$ אז קיים מספרים $\lambda_1, ..., \lambda_m$ כך ש:

$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla \Phi_1(a) + ... + \lambda_m \nabla \Phi_m(a)$

$\lambda_1, ..., \lambda_m$ נקראים כופלי לגרנז'.

ז"א $\nabla f(a) \perp T_a(M)$.

הוכחה

$a \in M$, $(\Phi_1, ..., \Phi_m)$ רגולרית ב־a.

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = m$ ולכן ניתן להניח שקיים מינור בגודל $m \times m$: $\Delta_m \neq 0$.

לפי משפט על פונק' סתומה:

$\exists U_{a'} V_{a''} \,:\, \varphi : U_{a'} \to V_{a''}$

$k = n - m$

$M \cap (U_{a''} \times V_{a''}) = \Gamma_\varphi$

$M \cap (U_{a''} \times V_{a''}) = \{(x_1, ..., x_k, \varphi_1(x_1, .., x_k), ..., \varphi_m(x_1, .., x_k)) \,:\, x \in U_{a'}\}$

נגדיר $g(x_1, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_k, \varphi_1(x_1, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_1, ..., x_n))$

נניח כי a נקודת קיצון, מינימום בה"כ.

$g(a') = f(a', \varphi(a')) = f(a)$

$\forall x \in U_{a'} \,:\, g(x) \geq g(a')$

a' נקודת מינימום ל־g בלי תנאי.

$g : U_{a'} \to \mathbb{R}$, $U_{a'} \Subset \mathbb{R}$, ולכן a' נקודה קריטית ל־g, כלומר

$j = 1, .., k \,:\, \frac{\partial g}{\partial x_j}(a') = 0$

נגזור את g לפי x_j:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a') = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j}(a') = 0$$

$$\nabla f(a) \quad \perp \quad \left(0, ..., \overset{j}{1}, .., 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(a'), ..., \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(a')\right) := E_j$$
$$1 \leq j \leq k$$

$\boxed{\nabla f(a) \perp E_1, ..., E_k}$

נוסיף את האילוצים:

$$(x_1, .., x_k) \in U_{a'}, \begin{cases} \Phi_1(x_1, .., x_k, \varphi_1(x_1, .., x_k), ..., \varphi_m(x_1, ..., x_k)) = 0 \\ \Phi_2(x_1, .., x_k, \varphi_1(x_1, .., x_k), ..., \varphi_m(x_1, ..., x_k)) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, .., x_k, \varphi_1(x_1, .., x_k), ..., \varphi_m(x_1, ..., x_k)) = 0 \end{cases}$$

נגזור לפי x_j

$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}(a) + \sum_{s=1}^m \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{k+s}}(a) \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j}(a') & = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}(a) + \sum_{s=1}^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{k+s}}(a) \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j}(a') & = 0 \end{cases}$

$\Leftarrow \nabla \Phi_1(a), ..., \nabla \Phi_m(a) \perp E_1, ..., E_k$ ז"א $\langle \nabla \Phi_j(a), E_i \rangle$: $1 \leq j \leq k$.

$\dim \operatorname{spam}\{E_1, ..., E_k\} = k$ ולכן $\dim\left(\operatorname{span}\{E_1, .., E_k\}^\perp\right) = n - k = m$ (השלמה אורתוגנלית).

$$\nabla f(a)\underbrace{\nabla\Phi_1(a),...,\nabla\Phi_m(a)}_{\text{Independent}}\perp\operatorname{span}\{E_1,...,E_k\}$$

ולכן

$$\nabla f(a)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla\Phi_i(a)$$

הרצאה 20

$$f\to min,max$$
$$\begin{cases}\Phi_1(x_1,...,x_n)=0\\ ....\\ \Phi_m(x_1,...,x_n)=0\end{cases}$$
$$\Phi_j\in C^r$$

$\Phi=(\Phi_1,..,\Phi_m)$ רגולרית על $M=\{\Phi=0\}$

אם a נק' קיצון מקומי עם תנאי $\Phi=0$ אז $\nabla f=\sum_{i=1}^m\lambda_i\nabla\Phi_i$

כלל כופלי לגראנז'

$$f\to max,min$$
$$\Phi_1(x)=...=\Phi_m(x)=0$$

$L:=f-\sum_{i=1}^m\lambda_i\Phi_i$-פונ' לגראנג'

a-נקודת קיצון $\Leftarrow\nabla L(a)=0$

$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}=0\\ ...\\ \frac{\partial L}{\partial x_n}=0\end{cases},\begin{cases}\Phi_1(x)=0\\ ...\\ \Phi_m(x)=0\end{cases}$ $n+m$ משוואות עבור $x_1,..,x_n,\lambda_1,..,\lambda_m$

דוגמא

$$u=x-2y+2z$$
$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$L=x-2y+2z-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$$
$$\begin{cases}L'_x=1-2\lambda x=0 & \Rightarrow x=\frac{1}{2\lambda}\\ L'_y=-2-2\lambda y=0 & \Rightarrow y=-\frac{1}{\lambda}\\ L'_z=2-2\lambda z=0 & z=\frac{1}{\lambda}\end{cases}$$
$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=1\Rightarrow\lambda=\pm\frac{3}{2}$$
$$x=\pm\frac{1}{3},y=\mp\frac{2}{3},z=\pm\frac{2}{3}$$
$$a_{1,2}=\left(\pm\frac{1}{3},\mp\frac{2}{3},\pm\frac{2}{3}\right)$$
$$f(a_1)=3,f(a_2)=-3\Rightarrow\max_{s^2}f=3,\min_{s^2}f=-3$$

דוגמא

$$f(x,y,z)=xyz$$
$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$$
$$L=xyz-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)-\mu(x+y+z)$$
$$\begin{cases}L'_x=yz-2\lambda x-\mu=0\\ L'_y=xz-2\lambda y-\mu=0\\ L'_z=xy-2\lambda z-\mu=0\end{cases}$$
$$\begin{cases}xyz-2\lambda x^2-\mu x=0\\ xyz-2\lambda y^2-\mu y=0\\ xyz-2\lambda z^2-\mu z=0\end{cases}$$
$$\oplus\, 3xyz-2\lambda=0\Rightarrow\lambda=\frac{3}{2}xyz$$
$$yz=\frac{2\lambda}{3x},yz-2\lambda x-\mu=0\Rightarrow\frac{2\lambda}{3x}-2\lambda x-\mu=0\Rightarrow\begin{cases}2\lambda-6\lambda x^2-3\mu x=0\\ \lambda y-6\lambda y^2-3\mu y=0\\ 2\lambda-6\lambda z^2-3\mu z=0\end{cases}\Rightarrow x=y\vee x=z\vee y=z$$

נראה עבור $x=y$

$$\begin{cases}2x^2+z^2=1\\ 2x+z=0\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{z}{2}\Rightarrow 2\frac{z^2}{4}+z^2=1\Rightarrow z=\pm\sqrt{\frac{2}{3}},x=y=\mp\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{2}=...=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}$$

קיצונים על תחום

$\partial\Omega$-משטח דיפרנציאבלי

$f \in C^1(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega}$-קומפקט. לפי משפט Weirtstrass $\exists \max_{x\in\bar{\Omega}} f(x) = f(x_{max}), \min_{x\in\bar{\Omega}} f(x) = f(x_{min})$

$a_{max} \in \Omega \Rightarrow \nabla f(a_{max}) = 0$, $a_{max} \in \partial\Omega \Leftarrow a_{max}$ נק' קיצון מקומי עם התנאי $\Phi = 0$

$a_1, .., a_n$ נקודות קריטיות $\nabla f(a) = 0$

$max(f(a_1), ..., f(a_n)) = \max_{x\in\Omega} f(x)$

תרגיל

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$

$x^2 + y^2 \le 25$

$\max f(x,y) = ?, \min f(x,y) = ?$

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 12 = 0 & x = 6 \\ f'_y = 2y + 16 = 0 & y = -8 \end{cases} \Rightarrow a = (6,-8)$$

על השפה: $x^2 + y^2 = 25$

$f|_{x^2+y^2=25} = 25 - 12x + 16y$

$(6,-8) \notin \bar{\Omega}$

$L = 25 - 12x + 16y - \lambda\left(x^2 + y^2 - 25\right)$

$L'_x = -12 - 2\lambda x = 0$

$L'_y = 16 - 2\lambda y = 0$

$x = -\frac{6}{\lambda}, y = \frac{8}{\lambda}$

....

$b_{1,2} = (\mp 3, \pm 4)$

תרגיל להגשה (בונוס)

$a_i, x_i \ge 0$

הוכח כי $\sum_{i=1}^n a_i x_i \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ עבור $p, q \ge 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$|(a,x)| \le ||a||_p \, ||x||_q$

רמז:

$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \to min$ על תנאי $\sum_{i=1}^n a_i x_i = A$ $(x_i \ge 0)$

פרק 4 אינטגרציה ב$\mathbb{R}^n$ - אינטגרל של Riemann-Darboux

קטע n מימדי

$n = 1 : [a,b]$

$n > 1 \Rightarrow P = [a_1, b_1] \times ... [a_n, b_n] = \{x = (x_1, ..., x_n) : a_i \le x_i \le b_i, i = 1, ..., n\}$

נפח של P

$V(P) = vol(P) = (b_1 - a_1) ... (b_n - a_n)$

$\mathring{P} = (a_1, b_1) \times ... (a_n, b_n)$

$P \mathring{\cap} Q := \mathring{P} \cap \mathring{Q}$

חלוקה

$$n=1\Rightarrow[a,b]\,,a=x_0<x_1<...<x_N=b,[a,b]=\bigcup_{i=1}^{N}\Delta^{(i)}$$

$$n>1\Rightarrow P=[a_1,b_1]\times...[a_n,b_n]\,,\begin{cases}[a_1,b_1]=\bigcup_{i_1=1}^{n}\Delta_1^{(i_1)}\\ \vdots\\ [a_n,b_n]=\bigcup_{i_n=1}^{n}\Delta_n^{(i_n)}\end{cases}$$

$$P_{i_1,..,i_n}=\Delta_1^{(i_1)}\times...\times\Delta_n^{(i_n)}$$

חלוקה - $\mathcal{P}=\left\{\mathrm{P_{i_1,..,i_n}}\right\}$ של P, בנייה של אינטגרל

הגדרה

תהי פונ' $f:P\to R$. P קטע n ממימדי, f חסומה $\forall x\in P:|f(x)|\le M$

אם $\mathcal{P}$ חלוקה של P אז סכום עליון:

$$\bar{S}(f,\mathcal{P}):=\sum_{i=1}^{n}M_iV(\mathcal{P}_i)$$ עבור $M_i=sup_{x\in P_i}f(x)$

סכום תחתון:

$$\underline{m_iV(P_i)}(f,\mathcal{P}):=\sum_{i=1}^{n}M_iV(P_i)$$ עבור $m_i=\inf_{x\in P_i}f(x)$

$$\underline{S}(f,\mathcal{P})\le\overline{S}(f,\mathcal{P})$$

הגדרה

אם $\mathcal{Q},\mathcal{P}$ חלוקות של P אז נגדיר $\mathcal{Q}\cap\mathcal{P}:=\left\{\mathcal{Q}_i\mathring{\cap}\mathcal{P}_i\right\}$

למה

מלבן n ממימדי P ו-$\mathcal{Q},\mathcal{P}$ חלוקות של P, אזי $\underline{S}(f,Q)\le\overline{S}(f,P)$.

הרצאה 21

למה:

P מלבן n מימדי, $f:P\to\mathbb{R},|f(x)|<C$, אזי:
$$\forall\mathcal{P},\mathcal{Q}:\underline{S}(f,\mathcal{Q})\le\overline{S}(f,\mathcal{P})$$

הוכחה

$$\mathcal{R}:=\mathcal{P}\mathring{\cap}\mathcal{Q}$$

$$\overline{S}(f,\mathcal{R})=\sum_{i,j}\sup_{x\in P_i\mathring{\cap}Q_j}vol\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right)=$$
$$\sum_i\left(\sum_j\sup_{x\in\mathcal{P}_i\mathring{\cap}\mathcal{Q}_j}f(x)\,vol\left(\mathcal{P}_i\mathring{\cap}\mathcal{Q}_j\right)\right)\le\sum_i\left(\sum_j\sup_{x\in\mathcal{P}_i}f(x)\,vol\left(\mathcal{P}_i\mathring{\cap}\mathcal{Q}_j\right)\right)$$
$$=\sum_i\sup_{x\in\mathcal{P}_i}f(x)\sum_j vol\left(\mathcal{P}_i\mathring{\cap}\mathcal{Q}_j\right)=\sum_i\sup_{x\in\mathcal{P}_i}f(x)\,vol(\mathcal{P}_i)=\overline{S}(f,\mathcal{P})$$

הוכחנו כי $\overline{S}(f,\mathcal{R})\le\overline{S}(f,P)$. מתקיים גם $\underline{S}(f,\mathcal{R})\ge\underline{S}(f,Q)$ ולכן:
$$\underline{S}(f,Q)\le\underline{S}(f,\mathcal{R})\le\overline{S}(f,\mathcal{R})\le\overline{S}(f,P)$$
$$\Rightarrow\underline{S}(f,Q)\le\overline{S}(f,P)$$

הערה

$$M:=\sup_{x\in P}f(x)$$
$$m:=\inf_{x\in P}f(x)$$
$$\overline{S}(f,\mathcal{P})=\textstyle\sum_i\sup_{x\in\mathcal{P}_i}f(x)\,\mathrm{vol}(\mathcal{P}_i)\le M\sum_i\mathrm{vol}(\mathcal{P}_i)=M\mathrm{vol}(\mathcal{P})$$
$$\underline{S}(f,\mathcal{P})=\textstyle\sum_i\inf_{x\in\mathcal{P}_i}f(x)\,\mathrm{vol}(\mathcal{P}_i)\ge m\sum_i\mathrm{vol}(\mathcal{P}_i)=m\mathrm{vol}(\mathcal{P})$$
$$m\mathrm{vol}(\mathcal{P})\le\underline{S}(f,\mathcal{Q})\le\overline{S}(f,\mathcal{P})\le M\mathrm{vol}(\mathcal{P})$$

הגדרה

$f:P\to\mathbb{R},|f(x)|\le C$

אינטגרל עליון $\inf_{\mathcal{P}}\overline{S}(f,\mathcal{P}):=\overline{I}$

אינטגרל תחתון $\sup_{\mathcal{Q}}\underline{S}(f,\mathcal{Q}):=\underline{I}$

נשים לב כי :

$$\forall\mathcal{P}_1,\mathcal{Q}_1:\underline{I}\le\sup_{\mathcal{Q}}\underline{S}(f,\mathcal{Q})\le\underline{S}(f,\mathcal{Q}_1)\le\overline{S}(f,\mathcal{P}_1)\le\inf_{\mathcal{P}}\overline{S}(f,\mathcal{P})=\overline{I}$$

הגדרה

$f:P\to\mathbb{R},|f(x)|\le C$

אומרים כי f אינטגרבילית לפי רימן־דרבו אם $\underline{I}(f)=\overline{I}(f):=I(f)=\int_P f(x)$.

נסמן $f\in\mathcal{R}(P)$.

משפט

$f:P\to\mathbb{R},|f(x)|\le C$

$f\in\mathcal{R}(P)$ אם ורק אם $\forall\epsilon>0\exists P:0\le\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\epsilon$

הוכחה

נניח כי התנאי מתקיים

$$\forall\epsilon>0\exists\mathcal{P}:0\le\overline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)-\underline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)<\epsilon$$
$$\overline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)<\underline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)+\epsilon$$
$$\overline{I}=\inf_{\mathcal{Q}}\overline{S}\left(f,\mathcal{Q}\right)<\underline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)+\epsilon$$
$$\overline{I}-\epsilon<\underline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)$$
$$\overline{I}-\epsilon<\sup_{\mathcal{Q}}\underline{\mathrm{S}}\left(f,\mathcal{Q}\right)=\underline{\mathrm{I}}$$
$$0\le\overline{I}-\underline{I}<\epsilon$$
$$\epsilon\to0\Rightarrow\overline{I}=\underline{I}\Rightarrow f\in\mathcal{R}\left(P\right)$$

בכיוון השני, נניח כי $f\in\mathcal{R}\left(P\right)$

נקבע $\epsilon>0$

$$\exists\mathcal{Q}:I-\epsilon<\underline{S}\left(f,\mathcal{Q}\right)\le I$$
$$\exists\mathcal{P}:I<\overline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)\le I+\epsilon$$
$$I-\epsilon<\underline{S}\left(f,\mathcal{Q}\right)\le\overline{S}\left(f,P\right)\le I+\epsilon$$

אז: $\mathcal{F}:=\mathcal{P}\overset{\circ}{\cap}\mathcal{Q}$

$$I-\epsilon<\underline{S}\left(f,\mathcal{Q}\right)\le\underline{S}\left(f,\mathcal{F}\right)\le\overline{S}\left(f,\mathcal{F}\right)\le\underline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)\le I+\epsilon$$
$$0\le\overline{S}\left(f,\mathcal{R}\right)-\underline{S}\left(f,\mathcal{R}\right)\le2\epsilon$$
$$\boxed{f\in\mathcal{R}\left(P\right)\Leftrightarrow\forall\epsilon>0\exists\mathcal{P}:0\le\overline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)-\underline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)<\epsilon}$$

משפט

אם $f\in C\left(P\right)$ אזי $f\in\mathcal{F}\left(P\right)$

הוכחה

נקבע $\epsilon>0$, לפי משפט קנטור f רציפה במ"ש בP.

$$\exists\delta>0:\forall x,y\in P:\left\Vert x-y\right\Vert_{\infty}<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\epsilon$$
$$P=\left[a_1,b_1\right]\times...\times\left[a_n,b_n\right]$$

ניקח N טבעי כך ש: $\frac{\max\left(b_i-a_i\right)}{N}<\delta$

$$\frac{\max\left(b_I-a_i\right)}{\delta}<N$$
$$\Delta_i^{(s)}=a_i+\frac{s}{N}\left(b_i-a_i\right)$$
$$\mathcal{P}=\left\{\Delta_1^{(i_1)}\times...\times\Delta_n^{(i_n)}\right\}=\left\{\mathcal{P}_i\right\}$$

$x,y\in\mathcal{P}_i$ כי $\left\Vert x-y\right\Vert_{\infty}<\delta$ ולכן $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\epsilon$ וגם $\left|M_i-m_i\right|<\epsilon$

$$M_i=\sup_{x\in\mathcal{P}_i}f\left(x\right)=f\left(x_{max}\right),m_i=\inf_{x\in\mathcal{P}_i}f\left(x\right)=f\left(x_{min}\right)$$
$$\overline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)-\underline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)=\sum_iM_iV\left(\mathcal{P}_i\right)-\sum_im_iV\left(\mathcal{P}_i\right)=\sum_i\left(M_i-m_i\right)V\left(\mathcal{P}_i\right)<\epsilon\sum_iV\left(\mathcal{P}_i\right)=\epsilon V\left(\mathcal{P}\right)$$
$$\forall\epsilon>0\exists\mathcal{P}:0\le\overline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)-\underline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)<\epsilon V\left(\mathcal{P}\right)$$

ולכן לפי הקריטריון $f\in\mathcal{R}\left(P\right)$

קבוצות ממידה אפס

הגדרה

$N\subset\mathbb{R}^n$ ממידה 0, $\mathrm{mes}N=0$ אם $\forall\epsilon\exists\left\{P_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ P_i קטעים, כך ש $N\subset\bigcup_{i=1}^{n}\overset{\circ}{P_i}$ ו $\sum_{i=1}^{\infty}V\left(P_i\right)<\epsilon$

דוגמא

רציונלים $n=1:\left\{r_n\right\}_{n=1}^{\infty}$

נקבע $\epsilon>0$

$$P_n=\left(r_n-\frac{\epsilon}{2^{n+1}},r_n+\frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)$$
$$\mathbb{Q}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^n}=\epsilon$$

עוד דוגמא היא קבוצת קנטור, כי כל שלב מורידים $\frac{2}{3}$ מהקטע $\mathrm{mes}\left(K\right)=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}^n=1-\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=0$.

למה

N קומפקטית אז כל כיסוי $N\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}P_i$ כולל תת־כיסוי סופי.

מסקנה

אם N קומפקטית:

$$\text{mes}N=0\Leftrightarrow\forall\epsilon>0\exists\left\{P_i\right\}_{i=1}^{M}:N\subset\bigcup_{i=1}^{M}P_i,\sum_{i=1}^{m}V\left(P_i\right)<\epsilon$$

משפט

$f:P\to\mathbb{R},\left|f\left(x\right)\right|<C$. נניח ש$f\in C\left(P\backslash N\right)$ עבור N קבוצה קומפקטית, $\text{mes}N=0$, אזי $f\in\mathcal{R}\left(P\right)$

הוכחה

נקבע $\epsilon>0$

מלמה קודמת $N\subset P_1\cup...\cup P_M$ כך ש$\sum_{i=1}^{M}V\left(P_i\right)<\epsilon$.

נתבונן ב $K:=P\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{M}P_i\right)$

K קבוצה חסומה וסגורה, קומפקטית.

$\mathcal{P}'$ חלוקה שמוכלת ב $\left\{P_i\right\}_{i=1}^{M}$, $f\in C\left(K\right)$ ולכן לפי משפט קנטור f רציפה במ"ש.

$\exists\delta>0:\left\|x-y\right\|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\epsilon$

בונים חלוקה $\mathcal{P}''$ כך ש:

$$\forall\mathcal{P}_i''\subset K:\left|\sup_{\mathcal{P}_i}f\left(x\right)-\inf_{\mathcal{P}_i}f\left(x\right)\right|<\epsilon$$

$\mathcal{P}'''=\mathcal{P}'\mathring{\cap}\mathcal{P}''$

מקבלים חלוקה $\left\{\mathcal{Q}_j\right\}=\mathcal{P}'''$

$\forall\mathcal{Q}_j\in\mathcal{P}''':\mathcal{Q}_j\mathring{\cap}\mathcal{P}_i\neq\phi$

$\left|\sup_{Q_j}f\left(x\right)-\inf_{Q_j}f\left(x\right)\right|<\epsilon$ לפי רציפות במ"ש.

$$\begin{aligned}\overline{S}\left(f,\mathcal{P}'''\right)-\underline{S}\left(f,\mathcal{P}'''\right) &=\\ \sum_{i=1}^{M}\left(\sup_{x\in P_i}f\left(x\right)-\inf_{x\in P_i}f\left(x\right)\right)V\left(P_i\right) &+ \sum_{Q_j\in\mathcal{P}'''}\left(\sup_{x\in Q_j}f\left(x\right)-\inf_{c\in Q_j}f\left(x\right)\right)V\left(Q_j\right)\end{aligned}$$

$\left|f\left(x\right)\right|\leq C$

$\left|\sup_{x\in P_i}f\left(x\right)-\inf_{c\in P_i}f\left(x\right)\right|\leq 2C$

.1

$$\sum_{i=1}^{M}\left(\sup_{x\in P_i}f\left(x\right)-\inf_{x\in P_i}f\left(x\right)\right)V\left(P_i\right)\leq 2C\sum_{i=1}^{M}V\left(P_i\right)<2c\epsilon$$

.2

$$\sum_{Q_j\in\mathcal{P}'''}\left(\sup_{x\in Q_j}f\left(x\right)-\inf_{c\in Q_j}f\left(x\right)\right)Vol\left(Q_j\right)\leq\epsilon Vol\left(P\right)$$

$\Rightarrow\left|\overline{S}-\underline{S}\right|\leq 2C\epsilon+\epsilon Vol\left(P\right)$

כלומר אם היינו לוקחים $\frac{\epsilon}{2C+Vol(P)}$ היה יוצא קטן מϵ.

נפח

הגדרה

תהי $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, פונקציה קרקטריסטית characteristic function (indicator) :

$$\chi_{\Omega}\left(x\right)=\begin{cases} 1 & ,x\in\Omega\\ 0 & ,x\notin\Omega \end{cases}$$

הגדרה

Ω קבוצה חסומה: $\exists P:\Omega\subset P$

Ω בעלת נפח (מדידה לפי רימן) אם $\chi_{\Omega}\in\mathcal{R}\left(P\right)$

הגדרה

אם Ω מדידה אז $\int\chi_{\Omega}\left(x\right)dx:=Vol\left(\Omega\right)$

הרצאה 22

$\Omega\subset P$

$\chi\in\mathcal{R}(P)$

$n=1:\ \Omega=\{r\in\mathbb{Q}:r\in[0,1]\}$ χ_Ω־פונ' דיריכלה לא דיפ' כי $\underline{S}(\chi_\Omega,P)=0,\overline{S}(\chi_\Omega,P)=1$

אינטגרל על קבוצה

הגדרה:

$A\subset P;\ A\in\mathcal{R}(P)$

$\int_A f(x):=\int_P\chi_A(x)f(x)\,dx$

תכונות

אדטיביות:

1. A,B

$A\cap B=\phi$

$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B$

$(\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B})$

2. $A,B\subset P$

$$A\cap B=\phi\Rightarrow\int_{A\cup B}f(x)\,dx=\int_A f(x)\,dx+\int_B f(x)\,dx$$

3. חיוביות:

$f\geq0\Rightarrow\int_P f(x)\,dx\geq0$

$f,g\in\mathcal{R}(P):f(x)\geq g(x)\Rightarrow\overline{S}(f,\mathcal{P})\geq\overline{S}(g,\mathcal{P})\Rightarrow\int_p f(x)\,dx\geq\int_P g(x)\,dx$

מסקנה

1. $m\leq f(x)\leq M$ כאשר

$$mV(P)=\int_P mdx\leq\int_P f(x)\,dx\leq\int_P Mdx=MV(P)$$

2.

$$-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|\Rightarrow-\int_P|f(x)|\,dx\leq\int_P f(x)\,dx\leq\int_P|f(x)|$$

אי שוויון המשולש

$\boxed{\left|\int_P f(x)\,dx\right|\leq\int_P|f(x)|}$

$\left|\int_A f(x)\,dx\right|\leq\sup_{x\in A}|f(x)|\int_A dx=\sup_{x\in A}|f(x)|V(A)$

$\boxed{\int_P(-f(x))\,dx=-\int_P f(x)\,dx}$

הוכחה

$$\sup_{x\in B}\left(-f,(x)\right)=-\inf_{x\in B}f\left(x\right)$$

$\mathcal{P}$חלוקה של P:

$$\overline{S}\left(-f,\mathcal{P}\right)=-\underline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)$$

$$\inf_{\mathcal{P}}\overline{S}\left(-f,\mathcal{P}\right)=\sup_{\mathcal{P}}\underline{S}\left(-f,\mathcal{P}\right)=-\sup_{\mathcal{P}}\underline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)=-\inf_{\mathcal{P}}\overline{S}\left(f,\mathcal{P}\right)=-\int_{\mathcal{P}}f\left(x\right)dx$$

$$\Rightarrow\int_{P}\left(-f\left(x\right)dx\right)=-\int_{P}f\left(x\right)dx$$

$$\boxed{\int_{P}\alpha f\left(x\right)dx=\alpha\int_{P}f\left(x\right)dx}$$

הוכחה

$\alpha=\begin{cases}|\alpha| & \alpha\geq0\\-|\alpha| & \alpha\leq0\end{cases}$ ולכן מספיק לקחת $\alpha\geq0$.

$$\begin{aligned}
\sup_{x}\alpha f\left(x\right) &= \alpha\sup_{x}f\left(x\right)\\
\inf_{x}\alpha f\left(x\right) &= \alpha\inf_{x}f\left(x\right)\\
&\Downarrow\\
\overline{S}\left(\alpha f,P\right) &= \alpha\overline{S}\left(f,P\right)\\
\underline{S}\left(\alpha f,P\right) &= \alpha\underline{S}\left(f,P\right)\\
\int_{P}\alpha f\left(x\right)dx &= \int\inf_{P}\overline{S}\left(\alpha f,P\right)=\alpha\inf_{P}\overline{S}\left(f,P\right)=\alpha I\left(f\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{P}\left(f+g\right)dx=\int_{P}fdx+\int_{P}gdx}$$

הוכחה

$\mathcal{P},\mathcal{Q}$ חלוקות של P.

$$\overline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right)$$
$$=\sum_{i,j}\sup_{x\in P_{i}\mathring{\cap}Q_{j}}\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)V\left(P_{i}\mathring{\cap}Q_{j}\right)\right)+\sum_{i,j}\sup_{x\in P_{i}\mathring{\cap}Q_{j}}g\left(x\right)V\left(P_{i}\mathring{\cap}Q_{j}\right)$$

$$\leq\overline{S}\left(f,P\mathring{\cap}Q\right)+\overline{S}\left(g,P\mathring{\cap}Q\right)\leq\overline{S}\left(f,P\right)+\overline{S}\left(g,Q\right)$$

קיבלנו $\overline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right)\leq\overline{S}\left(f,P\right)+\overline{S}\left(g,Q\right)$

וגם $\underline{S}\left(f,P\right)+\underline{S}\left(g,Q\right)\leq\underline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right)\leq\overline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right)\leq\overline{S}\left(f,P\right)+\overline{S}\left(g,Q\right)$

$$\overline{I}\left(f+g\right)\leq\overline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right)\leq\overline{S}\left(f,P\right)+\overline{S}\left(g,Q\right)$$

$$\underline{S}\left(f,P\right)+\underline{S}\left(g,Q\right)\leq\underline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right)\leq\underline{I}\left(f+g\right)$$

קיבלנו:

$$\underline{S}\left(f,P\right)+\underline{S}\left(g,Q\right)\leq\underline{I}\left(f+g\right)\leq\overline{I}\left(f+g\right)\leq\overline{S}\left(f,P\right)+\overline{S}\left(g,Q\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\sup_{P}\underline{S}\left(f,P\right)+\sup_{Q}\underline{S}\left(g,Q\right)\leq\underline{I}\left(f+g\right)\leq\overline{I}\left(f+g\right)\leq\inf_{P}\overline{S}\left(f,P\right)+\inf_{Q}\overline{S}\left(g,Q\right)$$
$$I\left(f\right)+I\left(g\right)\leq\underline{I}\left(f+g\right)\leq\overline{I}\left(f+g\right)\leq I\left(f\right)+I\left(g\right)$$

ולכן $I\left(f\right)+I\left(g\right)=I\left(f+g\right)$

הערה

אם $N\subseteq P$ קבוצה קומפקטית, $mesN=0$ ו־$f\left(x\right)=g\left(x\right)\forall x\in P\backslash N$ אז:
$f\in\mathcal{F}\left(P\right)\Leftrightarrow g\in\mathcal{F}\left(P\right)$ ו$I\left(f\right)=I\left(g\right)$.

מחלקה $E\left(P\right)$

הגדרה

$f\in E\left(P\right)$ אם:
$\exists A_{1},...,A_{k}\subset P$ כך ש:

1. A_{j} קומפקטית
2. $A_{j}\subset M_{j}$ עבור M_{j} משטח דפ' מ $C^{r},r\geq1$
3. $f\in C\left(P\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{k}A_{j}\right)\right)$

משפט

אם $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ו$f\in E\left(P\right)$ אז $f\in\mathcal{R}\left(P\right)$.

מספיק להראות כי

אם $A\subset M\subset P$ עבור M-C^{r}-משטח, $r\geq1$ אז $\mathrm{mes}A=0$.

למה

K-קטע n מימדי ו$\varphi:K\to\mathbb{R}$ C^{1}-פונקציה, $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j}}\left(x\right)\right|\leq C$ $x\in K,1\leq j\leq n:$
אז φ רציפה במידה שווה ב-K

הוכחה

$$\forall x,y\in K:\varphi\left(x\right)-\varphi\left(y\right)=\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j}}\left(x+\theta\left(y-x\right)\right)\left(x_{j}-y_{j}\right)_{0<\theta<1}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left|\varphi\left(x\right)-\varphi\left(y\right)\right| & \leq\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j}}\left(x+\theta\left(y-x\right)\right)\right|\left|x_{j}-y_{j}\right|\leq\max_{1\leq i\leq n}\left|x_{i}-y_{i}\right|\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j}}\left(x+\theta\left(y-x\right)\right)\right|\leq\\
\leq C_{n}\max_{1\leq i\leq n}\left|x_{i}-x_{j}\right| & =C_{n}\left\Vert x_{i}-y_{i}\right\Vert \end{aligned}$$

נקבע $\epsilon>0$, $\delta:=\frac{\epsilon}{C_{n}}$ ואז:
$\left|\varphi\left(x\right)-\varphi\left(y\right)\right|\leq\epsilon$

למה

אם $A\subset M\subset P$, M-C^{r}-משטח, $r\geq1$ אז $mesA=0$
(A קבוצה קומפקטית)

הוכחה

גרף$\forall x\in M\exists U_{x}\ni x:U_{x}\cap M=\Gamma_{\varphi}$
$M\subseteq\bigcup_{x\in M}U_{x}$ כיסוי פתוח
A קומפקטית ולכן קיים כיסוי סופי $M\subseteq\bigcup_{s=1}^{N}U_{s}$
$A=\bigcup_{s=1}^{N}\left(U_{s}\cap A\right)$
$mes\left(U_{s}\cap A\right)=0?$
בה"כ נניח $x_{n}=\varphi\left(x_{1},..,x_{n-1}\right)$
$\Gamma_{\varphi}=\left\{ x:x_{n}=\varphi\left(x_{1},..,x_{n-1}\right),x_{1},..,x_{n-1}\in K\right\}$ K קטע $n-1$ מימדי.
$\varphi\in C^{1}\left(K\right)\Leftarrow\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j}}$ רציפות בK ולפי הלמה φ רציפה במ"ש בK ולכל $\forall\epsilon>0\exists\delta>0:\forall x',x''\in$
K $\left\Vert x'-x''\right\Vert _{\infty}<\delta\Rightarrow\left|\varphi\left(x'\right)-\varphi\left(x''\right)\right|<\epsilon$

ניקח חלוקה של K : $K=\bigcup_{i=1}^{s}P_i'$ כל ש $\forall x',x''\in P_i':||x'-x''||_\infty<\delta$
נבחר $\xi_i\in P_i'$
נגדיר $P_i=P'\times\left[\varphi\left(\xi_i\right)-\frac{\epsilon}{2},\varphi\left(\xi_i\right)+\frac{\epsilon}{2}\right]$
$x'\in K\,,\,x_1=\varphi\left(x'\right)$
$K=\bigcup P_i'\Rightarrow\exists x'\in P_i'$
לפי בחירה
$\left|\varphi\left(x'\right)-\varphi\left(\xi_i\right)\right|<\epsilon$
$x_n\in\left[\varphi\left(\xi_i\right)-\frac{\epsilon}{2},\varphi\left(\xi_i\right)+\frac{\epsilon}{2}\right]$
קיבלנו $\forall x\in\Gamma_\varphi\exists i:P_i'\times\left[\varphi\left(\xi_i\right)-\frac{\epsilon}{2},\varphi\left(\xi_i\right)+\frac{\epsilon}{2}\right]=P_i$
$\Gamma_\varphi\subseteq\bigcup_{i=1}^{s}P_i$ - כיסוי!
$\sum_{i=1}^{s}v\left(P_i\right)=\sum_{i=1}^{s}v\left(P_i'\right)\epsilon=v\left(K\right)\epsilon$ ולכן $mes\left(\Gamma_\varphi\right)=0$

מסקנה

f-חסומה ב-P
$f\in E\left(P\right)\Rightarrow f\in\mathcal{F}\left(P\right)$

הגדרה

1. Ω תחום סגור אם $\overline{\overset{\circ}{\Omega}}=\Omega$
2. $\partial\Omega=\overline{\Omega}\backslash\overset{\circ}{\Omega}$ שפה
3. Ω תחום פשוט אם $\partial\Omega=\bigcup\limits_{j=1}^{s}M_j$ עבור M_j-C^r-משטחים.

הערה

אם Ω תחום חסום ופשוט אז $\Omega\in\mathcal{R}\left(P\right)$.

הוכחה

Ω חסומה ולכן קיים קטע n מימדי כך ש$\Omega\subset P$
χ_Ω אי רציפה לכל היותר ב$\partial\Omega$
$\partial\Omega=\bigcup_{j=1}^{n}M_j \Leftarrow$ χ_Ω רציפה חוץ מקבוצה במידה 0 ולכן $\chi_\Omega\in\mathcal{R}\left(P\right)$.

הגדרה

אם Ω קבוצה מדידה $\Omega\in\mathcal{R}\left(P\right)$ (וחסומה) אז לפי ההגדרה:
$V\left(\Omega\right)=\int_P\chi_\Omega dx=\int_\Omega 1dx$

הרצאה 23

Ω תחום פשוט
$f \in E(\Omega)$
$\exists A_1, .., A_k \subset \Omega$ כך שA_j-קומפקטית
M_k C^r-משטח, $A_k \subset M_k$
$\Omega \subset P$
$f(x)\chi_\Omega(x)$ - אי רציפות ב$A_1 \cup ... \cup A_k$ וגם ב$\partial\Omega$, ולכן $f\chi_\Omega$ אינטגרבילית בP.

משפט של Fubini

$\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$
$\mathbb{R}^{n+m} \ni x = (x', x'') : x' \in \mathbb{R}^n, x'' \in \mathbb{R}^m$
P קטע $n+m$ מימדי
$P = P' \times P''$

$$P = \prod_{j=1}^{n+m} [a_j, b_j] = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \times \prod_{j=n+1}^{m+n} [a_j, b_j]$$

אם $\mathcal{P}$-חלוקה של P אז $\mathcal{P} = \left\{\mathcal{P}_{ij} : \mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}'_i \times \mathcal{P}''_j ; \mathcal{P}' = \{\mathcal{P}'_i\}, \mathcal{P}'' = \left\{\mathcal{P}''_j\right\}\right\}$ כאשר $\mathcal{P}', \mathcal{P}''$ חלוקות של P', P'' בהתאמה.
$P = P' \times P'' \Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$

משפט (Fubini)

$\mathbb{R}^{n+m} \supset P = P' \times P''$
תהי $f \in \mathcal{R}(P)$, נניח שלכל $x' \in P'$ הפונקציה $f(x', x'')$ $P'' \ni x'' \to$ אינטגרבילית בP'' ונגדיר $\Phi(x') = \int_{P''} f(x', x'')\, dx''$.
אז $\Phi \in \mathcal{R}(P')$ ו$\int_{P'} \Phi(x')\, dx' = \int_P f(x)\, dx$
כלומר $\int_{P'} \left(\int_{P''} f(x', x'')\, dx''\right) dx' = \int_{P=P' \times P''} f(x)\, dx$

הוכחה

נקח חלוקה $\mathcal{P}'$ של P'

$$\begin{aligned}
\overline{S}(\Phi, \mathcal{P}') &= \sum_{i=1}^{N} \sup_{x' \in P'_i} \Phi(x')\, v(P'_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x' \in P'_i} \left(\int_{P''} f(x', x'')\, dx''\right) v(P'_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x' \in P'_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{P''_j} f(x', x'')\, dx''\right) v(P'_i) \\
&\leq \sum_{i} \sup_{x' \in P'_i} \left(\sum_{j} \sup_{x'' \in P''_j} f(x', x'')\, v\left(P''_j\right)\right) v(P'_i) \\
&\leq \sum_{i,j} \sup_{x' \in P'_i} \sup_{x'' \in P''_j} f(x', x'')\, v\left(P''_j\right) v(P'_i) \\
&= \sum_{i,j} \sup_{x \in P'_i \times P''_j} f(x)\, v\left(P'_i \times P''_j\right) \\
&= \overline{S}(f, \mathcal{P})
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}=\mathcal{P}'\times\mathcal{P}''$-חלוקה של P.
$\overline{S}(\Phi,\mathcal{P}')\le\overline{S}(f,\mathcal{P})$
וגם באותה הדרך $\underline{S}(f,\mathcal{P})\le\underline{S}(\Phi,\mathcal{P}')$
ולכן $\underline{S}(f,\mathcal{P})\le\underline{S}(\Phi,\mathcal{P}')\le\overline{S}(\Phi,\mathcal{P}')\le\overline{S}(f,\mathcal{P})$
$\mathcal{P}=\mathcal{P}'\times\mathcal{P}''$
נקבע $\epsilon>0$
$\exists\mathcal{P}:\overline{S}(f,\mathcal{P})<I(f)+\epsilon$
$\mathcal{P}=\mathcal{P}'\times\mathcal{P}''$
אז $\overline{S}(\Phi,\mathcal{P}')<I(f)+\epsilon$
$\overline{I}(\Phi)=\inf_{\mathcal{P}'}\overline{S}(f,\mathcal{P}')<I(f)+\epsilon$
$\exists\mathcal{P}:I(f)-\epsilon\le\underline{S}(f,\mathcal{P})$
$\mathcal{P}=\mathcal{P}'\times\mathcal{P}''$
אז $I(f)-\epsilon<\underline{S}(\Phi)$
ולכן:
$I(f)-\epsilon<\underline{I}(\Phi)\le\overline{I}(\Phi)<I(f)+\epsilon$
$\epsilon\to0\Rightarrow I(\Phi)=\underline{I}(\Phi)=\overline{I}(\Phi)\Rightarrow\Phi\in\mathcal{R}(\mathcal{P}')$

הערה

גם אם לכל $x''\in P''$ הפונקציה $P'\ni x'\to f(x',x'')\in\mathcal{R}(P')$ אז $\Psi(x''):=\int_{P'}f(x',x'')\,dx'$ היא אינטגרבילית בP'' ו$\int_{P''}\Psi(x'')\,dx''=\int_P f(x)\,dx$

משפט Fubini

$P=P'\times P'',f\in\mathcal{R}(P)$
אם:
$\forall x'\in P':f(x',*)\in\mathcal{R}(P'')$
$\forall x''\in P'':f(*,x'')\in\mathcal{R}(P')$
אז קיימים האינטגרלים:
$\int_{P'}\left(\int_{P''}f(x',x'')\,dx''\right)dx'=\int_{P''}\left(\int_{P'}f(x',x'')\,dx'\right)dx''=\int_P f(x)\,dx$
$P=P'\times P'$
$\int_{[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]}f(x)\,dx=\int_{[a_1,b_1]}..\int_{[a_n,b_n]}f(x_1,..,x_n)\,dx_n..dx_1$
$f\in E(\Omega)$, Ω-תחום פשוט

דוגמא

$I=\int_0^2\int_x^{2x}(f(x,y)\,dy)\,dx$
$0\le x\le2,x\le y\le x$

$$I=\iint\limits_{\substack{0\le x\le2\\x\le y\le2x}}f(x,y)\,dxdy=\int_0^4\left(\int_{\frac{y}{2}}^{\min(y,2)}f(x,y)\,dx\right)dy=\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^{y}f(x,y)\,dxdy+\int_2^4\int_{\frac{y}{2}}^{2}f(x,y)\,dxdy$$

דוגמא

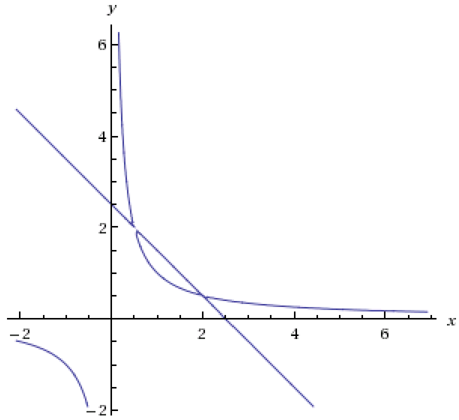
$\int_0^1\left(\int_0^1y^3e^{xy^2}dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^1y^3e^{xy^2}dx\right)dy=\int_0^1\frac{1}{y^2}\left(e^{y^2}-1\right)dy=\int_0^1y\left(e^{y^2}-1\right)dy=\int ye^{y^2}dy-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e-1)-\frac{1}{2}=\frac{e-2}{2}$

דוגמא - נוסחת דיריכלה

$a>0\ \int_0^a dx\left(\int_0^x f(x,y)\,dy\right)=\int_0^a dy\left(\int_y^a f(x,y)\,dx\right)$
נהוג גם לכתוב אינטגרלים כפולים עם הdx לפני.
$\Omega:0\le x\le a,0\le y\le x$

שטח

$$\Omega:\begin{cases}xy=a^2\\ x+y=\frac{5}{2}a \quad ,a>0\end{cases}$$
$$y=\frac{5}{2}a-x$$
$$x\left(\frac{5}{2}a-x\right)=a^2$$
$$x_1=2a, x_2=\frac{a}{2}$$
$$S=\int_{\frac{a}{2}}^{2a}\left(\int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5}{2}a-x}dy\right)dx=\int_{\frac{a}{2}}^{2a}\left(\frac{5}{2}a-x-\frac{a^2}{x}\right)dx=...$$



דוגמא ב $n=3$

$$\int_0^1 dx\left(\int_0^{1-x}dy\left(\int_0^{x+y}f(x,y,z)\,dz\right)\right)=\int dz\,(dx\,(fdy))$$
$$\Omega:\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$\Omega:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x & \downarrow\uparrow\\ 0\le z\le x+y\end{cases}$$
$$0\le z\le 1, 0\le x\le 1, y\le 1-x$$
$$\max(z-x,0)\le y\ \begin{cases}z-x\le y\\ 0\le y\end{cases}$$
$$I=\int_0^1 dz\left(\int_0^1 dx\left(\int_{\max(z-x,0)}^{1-x}f(x,y,z)\,dy\right)\right)$$
$$z=x+y\Rightarrow x+y-z=0\Rightarrow \overrightarrow{n}=(1,1,-1)$$

נוסחת החלפת משתנים

עבור $n=1$:
$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\{y=\varphi(x)\}=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(y)\,dy$$
$$x\in(a,b);\varphi'(x)\neq 0;\varphi\in C^1(a,b)$$
$\varphi'(x)\neq 0 \Leftarrow \varphi$ יורד או עולה ממש

1. אם φ עולה $c>d$: $\int_{[a,b]}f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int_{[c,d]}f(y)\,dy$
2. אם φ יורד $\int_{[a,b]}f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=-\int_{[c,d]}f(y)\,dy$

$$\Downarrow$$
$$\int_{[a,b]}f(\varphi(x))\,(-\varphi'(x))\,dx=\int f(y)\,dy$$

הרצאה 24

משפט (החלפת משתנים)

$\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ - תחומים פשוטים
$\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ - C^r - דיפאומורפיזם, $r \geq 1$
תהי $f \in \mathcal{R}(\Omega_2)$ (למשל f חסומה ו-$f \in E(\Omega_2)$).
אז הפונקציה $\left|\frac{\partial(\varphi_1,..,\varphi_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}(x)\right| f(\varphi(x))$ - אינטגרבילית ב-Ω_1 ו $\boxed{\int_{\Omega_1} f(\varphi(x)) \left|\frac{\partial(\varphi_1,..,\varphi_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}(x)\right| dx = \int_{\Omega_2} f(y)\, dy}$

למה 1

אם $\Omega_1 = \bigcup_{j=1}^N \Omega^j$, Ω^j תחום פשוט, $\overset{\circ}{\Omega^j} \cap \overset{\circ}{\Omega^i} = \phi$ לכל $i \neq j$
והמשפט נכון לכל Ω^j אז הוא נכון ל-Ω.

הוכחה

$$\forall j = 1...N : \int_{\Omega^j} f(\varphi(x)) \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right| dx = \int_{\varphi(\Omega^j)} f(y)\, dy$$

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Omega^j} f(\varphi(x)) \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right| dx = \sum_{j=1}^N \int_{\varphi(\Omega_1)} f(y)\, dy$$

$$\int_{\Omega_1} f(\varphi(x)) \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right| dx = \int_{\varphi(\Omega_1)} f(y)\, dy$$

למה 2

$\Omega_1 \xrightarrow{h} \Omega_2 \xrightarrow{k} \Omega_3$, h, k-C^r דיפ', $\Omega_j \subset^n$.
אם המשפט נכון ל-h ול-k אז המשפט נכון ל-$k \circ h$ $k \circ h : \Omega_1 \to \Omega_3$.

הוכחה

סימון: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) := \frac{\partial(\varphi_1,..,\varphi_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}(x)$

$$\int_{\Omega_3} f(z)\, dz = \{z = k(y)\, ; y \in \Omega_2\} = \int_{\Omega_2} f(k(y)) \left|\frac{\partial k}{\partial y}(y)\right| dy =$$

$$= \{y = h(x), x \in \Omega_1\} = \int_{\Omega_1} f(k(h(x))) \left|\frac{\partial k}{\partial y}(h(x))\right| \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x)\right| dx = \int_{\Omega_1} f((k \circ h)(x)) \left|\frac{\partial (k \circ h)}{\partial x}(x)\right| dx$$

הגדרה

φ שומרת קאורדינטות $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$ אם $\varphi(x_1, .., x_n) = (\varphi_1(x), ..., x_{i_1}, ..., x_{i_k}, ..., \varphi_n(x))$ כלומר $\varphi_{i_j}(x) = x_{i_j}$ לכל $1 \leq j \leq k$.

דוגמא

$n = 2 : \varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), y)$ שומר y.

למה 3

יהי דיפאומורפיזם $\varphi:\Omega_1\to\Omega_2$ אז לכל נקודה $a\in\Omega_1$ קיימת סביבה $a\ni U_a$ כך ש $\forall x\in U_a:\varphi(x)=(k\circ h)(x)$,
k,h - שומרים קאורדינטות (לפחות 1).

הוכחה

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a)\neq 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(a) & .... & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & .... & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(a) & .... & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}\neq 0$$

$\Delta_{n-1}\neq 0$ קיים מינור כזה, בה"כ:

$\frac{\partial(\varphi_1,..,\varphi_{n-1})}{\partial(x_1,...,x_{n-1})}(a)\neq 0$

$x=(x',x_n)$

$x'=(x_1,...,x_{n-1})$

נגדיר $h(x):=(\varphi_1(x),...,\varphi_{n-1}(x),x_n)$, h שומר x_n.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(a)=\det\begin{pmatrix} & & \vdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(a) \\ & \Delta_{n-1} & \vdots & \\ ... & ... & . & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n}(a) \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}=\Delta_{n-1}(a)\neq 0$$

לפי משפט על פונ' הפוכה $a\ni\exists U_a$ כך ש$h:U_a\to h(U_a)$ C^r דיפאמורפיזם.

$\exists h^{-1}:h(U_a)\to U_a$ - C^r דיפאומורפיזם.

נגדיר $k(y)=\left(y_1,...,y_{n-1},\varphi\left(h^{-1}(y)\right)\right)$

k שומר $y_1,..,y_{n-1}$

$k(h(x))=\left(h_1(x),...,h_{n-1}(x),\varphi_n\left(h^{-1}(h(x))\right)\right)=\varphi(x)$

$\Rightarrow\varphi=k\circ h$

הוכחה של המשפט

$\forall a\in\Omega\exists U_a$ מלמה 3. $\Omega\subset\bigcup_{j=1}^{N}U_{a_j}$

$\Omega=\bigcup_{j=1}^{N}\Omega_j$, Ω_j - תחום פשוט, $\Omega_j\subset U_{a_j}$

לפי למה 1 מספיק להוכיח לכל Ω_j.ולכן נסמן $\Omega=\Omega_j$, $\varphi=k\circ h$לפי למה 3.

לפי למה 2 מספיק להוכיח עבור או לk או לh.

נראה באינדוקציה לפי n.

עבור $n=1$ הוכחנו, נניח כי נכון עבור $n-1$.

נראה עבור n, ועבור h:

$h(x)=(\varphi_1(x),...,\varphi_{n-1}(x),x_n)$

$x=(x',x_n)$

$Pr_n\Omega=\left\{t\in:\exists x'\in^{n-1}\ (x',t)\in\Omega\right\}$

$\frac{\partial h\left(h',t\right)}{\partial(x',t)}(x',t)=\frac{\partial(h_1,..,h_{n-1})}{\partial(x_1,..,x_{n-1})}(x',t)=\frac{\partial(\varphi_1,..,\varphi_{n-1})}{\partial(x_1,..,x_{n-1})}(x',t)$

$$\int_\Omega(f\circ h)\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x)\right|dx=\int_{t\in Pr_n\Omega}\left(\int_{\Omega_t=\Omega\cap\{x_n=t\}\subset^{n-1}}f(\varphi_1(x',t),...,\varphi_{n-1}(x',t),t)\left|\frac{\partial h\left(x',t\right)}{\partial(x',t)}\right|dx'\right)dt=$$

$$=\int_{t\in Pr_n\Omega}\left(\int_{x'\in\Omega_t\subset^{n-1}}f(h(x',t))\left|\frac{\partial(\varphi_1,..,\varphi_{n-1})}{\partial(x_1,..,x_{n-1})}(x',t)\right|dx'\right)dt=$$

נבצע החלפת משתנים ב$^{n-1}$:

$=\int_{t\in Pr_n\Omega}\left(\int f(y,t)\,dy\right)dt=\int_\Omega f(x)\,dx$

$$\boxed{\int_{\varphi(\Omega)}f(y)\,dy=\{y=\varphi(x)\}=\int_\Omega f(\varphi(x))\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right|dx}$$

משמעות גאומטרית של יעקוביאן:

$\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ דיפאומרפיזם, $a \in \Omega$, $a \in^n$.

$B(a,\epsilon) = \{x \in^n : \|x-a\| < \epsilon\}$

$\varphi : B(a,\epsilon) \to \varphi(B(a,\epsilon))$

$V(\varphi(B(a,\epsilon))) = \int_{\varphi(B(a,\epsilon))} dy = \{y = \varphi(x)\} = \int_{B(a,\epsilon)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right| dx$

$$\min_{x\in B(a,\epsilon)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right| v(B(a,\epsilon)) \leq \int_{B(a,\epsilon)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right| dx \leq \max_{x\in B(a,\epsilon)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right| v(B(a,\epsilon))$$

$$\min_{B(a,\epsilon)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| \leq \frac{1}{V(B(a,\epsilon))} \leq \max_{x\in B(a,\epsilon)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right|$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{V(B(a,\epsilon))} \int_{B(a,\epsilon)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right| dx = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a)\right|$$

ולכן

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{V(\varphi(B(a,\epsilon)))}{V(B(a,\epsilon))} = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a)\right|$$

$n=2$ קאורדינטות קוטביות

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$\int_{\varphi(\Omega)} f(y_1,...,y_n)\, dy_1..dy_n = \{y = \varphi(x), y_i = \varphi_j(x)\} = \int_\Omega f(y_1(x),...,y_n(x)) \left|\frac{\partial(y_1,..,y_n)}{\partial(x_1,..,x_n)}(x)\right| dx_1..dx_n$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$

$\boxed{\iint_{\varphi(\Omega)} f(x,y)\, dxdy =}$ להשלים :)

דוגמא

$\int_{x^2+y^2=1} (x^2+y^2)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r dr d\varphi = \frac{1}{4} 2\pi = \frac{\pi}{2}$

$S(B(0,R)) = \int_{x^2+y^2=R} dxdy = ... = \pi R^2$

דוגמא

$S(\Omega) = ?$

$\Omega = \left\{(x,y) \in^2 : \left(x^2+y^2\right)^2 \leq 2a^2xy\right\}$

$\partial\Omega : \left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2xy$

$\partial\Omega : r^4 = 2a^2r^2\cos\varphi\sin\varphi$

$r^2 = 2a^2\cos\varphi\sin\varphi = a^2\sin 2\varphi$

$\sin 2\varphi \geq 0, 0 \leq 2\varphi \leq \pi, 2\pi \leq 2\varphi \leq 3\pi$

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \pi \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$

$S(\Omega) = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr\right) d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}\right) d\varphi = ... = a^2$

דוגמא ב$n=3$ קאורדינטות ספריות

R, φ, ψ

$-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$

$0 < \varphi < 2\pi$

$z = R\sin\psi$

$x = R\cos\psi\cos\varphi$
$y = R\cos\psi\sin\varphi$
$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(R,\varphi,\psi)} = R^2\cos\psi$
$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

הרצאה 25

$z = r\sin\psi$
$x = r\cos\psi\cos\varphi$
$y = r\cos\psi\sin\varphi$
$-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$
$0 < \varphi < 2\pi$
$D = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = r^2\cos\psi$

$$V\left(B^3(0,R)\right) = \int_{B^3(0,R)} dxdydz = \int_0^R r^2 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^{2\pi} dp = \frac{r^3}{3}|_0^R \sin\psi|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi = \frac{4}{3}\pi R r^3$$

$\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1 \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ .... \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\cos\varphi_{n-1} \\ x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{n-1} \end{cases}$$

$D = \frac{\partial(x_1,...,x_n)}{\partial(r,\varphi_1,...,\varphi_{n-1})} = r\sin\varphi_1...\sin\varphi_{n-1}$
$V\left(B^n(0,R)\right) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n$
ולכן $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}\left(B^{2k+1}(0,R)\right) &= \frac{2^{k+1}\pi^k}{(k+1)!} R^{2k+1} \\ \mathrm{vol}\left(B^{2k}(0,R)\right) &= \frac{\pi^k}{k!} R^{2k} \end{aligned}$$

שטח

$\Omega = \{(x,y) : a < x < b, 0 < y < f(x)\}$
$S(\Omega) = \iint_\Omega dxdy = \int_{[a,b]} \left(\int_0^{f(x)} dy\right) dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx$

תרגיל

$\Omega : xy = a^2, xy = 2a^2, y = x, y = 2x$
$S(\Omega) = ?$
$u = xy, v = \frac{y}{x}$
$\varphi : \Omega \to D, \varphi(x,y) = (u,v) = \left(xy, \frac{y}{x}\right)$
$D = \left\{(u,v)\,, \begin{array}{c} a^2 \le u \le 2a^2 \\ 1 \le v \le 2 \end{array}\right\}$
$S(\Omega) = \iint_\Omega dxdy = \iint_D \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{pmatrix}=\frac{y}{x}+\frac{y}{x}=2v$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2v}$$

$$S(\Omega)=\iint_{\substack{a^2\le u\le 2a^2\\ 1\le v\le 2}}\frac{1}{2v}dudv=\frac{a^2}{2}\int_{[1,2]}\frac{1}{v}dv=\frac{a^2}{2}\ln(2)$$

נפח של מקבילון n מימדי

$$\Omega:\begin{array}{c} A_1\le a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n\le B_1\\ ...\\ A_n\le a_{n1}x_1+...+a_{nn}x_n\le B_n\end{array}$$

$$V(\Omega)=?$$

$$u_j=a_{j1}x_1+...+a_{jn}x_n$$

$$P:\begin{array}{c} A_1\le u_1\le B_1\\ \vdots\\ A_n\le u_n\le B_n\end{array}$$

$$\varphi:(x_1,...,x_n)\mapsto(u_1,...,u_n)$$

$$\varphi:\Omega\to P$$

$$V(\Omega)=\iint_\Omega dx_1...dx_n=\iint_P\left|\frac{\partial(x_1,...,x_n)}{\partial(u_1,...,u_n)}\right|du_1...du_n$$

$$A=(a_{ij})_{i,j=1}^n\Rightarrow\frac{\partial(x_1,...,x_n)}{\partial(u_1,...,u_n)}=\det(A)$$

$$V(\Omega)=\int_P\frac{1}{|\det(A)|}du=\frac{1}{|\det(A)|}(B_1-A_1)\dots(B_n-A_n)$$

$$V(P)=|\det A|\,V(\Omega)$$

נפח של פירמידה n מימדית

$$\Omega:\begin{array}{c}\frac{x_1}{a_1}+...+\frac{x_n}{a_n}<1\\ x_i>0,a_i>0\end{array}$$

קו ישר: $n=1:\frac{x_1}{a_1}\le 1\Rightarrow S=a_1$

$$n=2:\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}<1\Rightarrow S=\frac{a_1a_2}{2}$$

$n=3$:

$$\frac{x_1}{a_1}+...+\frac{x_n}{a_n}<R$$

$$V(a_1,...,a_n,R)=\int dx_1..dx_n=\left\{\frac{x_i}{R}=u_i\right\}=\int_{\frac{u_1}{a_1}+...+\frac{u_n}{a_n}<1}R^ndu_1..du_n=R^nV(a_1,...,a_n,1)$$

$$\frac{\partial(x_1,...,x_n)}{\partial(u_1,..,u_n)}=R^n$$

$$\begin{aligned}V_n(a_1,..,a_n,1)&=\int_{\frac{x1}{a_1}+...+\frac{x_n}{a_n}<1}dx_1..dx_n=\int_0^{a_n}\left(\int_{\frac{x1}{a_1}+...+\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}<1-\frac{x_n}{a_n}}dx_1..x_{n-1}\right)dx_n\\ &=\int_0^{a_n}V_{n-1}\left(a_1,..,a_{n-1},1-\frac{x_n}{a_n}\right)dx_n\\ &=\int_0^{a_n}\left(\int_{\frac{x1}{a_1}+...+\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}<1-\frac{x_n}{a_n}}dx_1..x_{n-1}\right)dx_n=\int_0^{a_n}V_{n-1}\left(a_1,..,a_{n-1},1-\frac{x_n}{a_n}\right)dx_n\\ &=\int_0^{a_n}\left(1-\frac{x_n}{a_n}\right)^{n-1}V_{n-1}(a_1,..a_{n-1},1)\,dx_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_n(a_1,..,a_n,1)&=\int_{\frac{x_1}{a_1}+...+\frac{x_n}{a_n}<1}dx_1..dx_n\\ &\quad\left\{\frac{x_i}{a_i}=t_i\right\}\\ &=\int_{\substack{t_1+..+t_n<1\\ t_i>0}}a_1..a_ndt_1..dt_n\end{aligned}$$

$$= a_1..a_n V\left(1,..,1\right)$$

$$V_n\left(a_1,..,a_n\right) = a_1..a_n V_n\left(1,..,1\right) = a_1..a_n V_n$$
$$V_n = \int_0^1 \left(1-x_n\right)^{n-1} V_{n-1} dx_n = \frac{1}{n} V_{n-1} \Rightarrow V_n = \frac{1}{n!}$$
$$V_n\left(a_1,..,a_n\right) = a_1...a_n V_n = \frac{a_1...a_n}{n!}$$

נפח של גליל

$$n = 3 : \Omega = \left\{(x,y) \in D : 0 \le z \le f\left(x,y\right)\right\}$$
$$V\left(\Omega\right) = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D \left(\int_{z\in[0,f(x,y)]} dz\right) dxdy = \iint_D f\left(x,y\right) dxdy$$

נפח של גוף סיבובי:

$n = 3$:
$$\int_{[a,b]} \pi f\left(y\right) dy = V\left(\Omega\right)$$

אינטגרל לא אמיתי ב$\mathbb{R}^n$

נניח כי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ כך שלכל קבוצה $K \subset \mathbb{R}^n$ קומפקטית $f|_K$ חסומה ולכל תחום פשוט $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $f|_\Omega$ פשוטה. $f \in E\left(\Omega\right)$.

מוגדר $\int_\Omega f\left(x\right) dx$ לכל תחום Ω פשוט.

כיסוי של $\mathbb{R}^n$

$\left\{\Omega_j\right\}_{j=1}^\infty ; \Omega_j \subset \mathbb{R}^n$

1. $\forall j : \Omega_j \subset \Omega_{j+1}$
2. $\bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j = \mathbb{R}^n$
3. לכל קבוצה קומפקטית $K \subset \mathbb{R}^n$ קיים j כך ש$K \subset \Omega_j$.

נגדיר עבור $f > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(x\right) dx := \lim_{j\to\infty} \int_{\Omega_j} f\left(x\right) dx$$

נגדיר:
$$f^+ = \frac{|f|+f}{2} \ge 0$$
$$f^- = \frac{|f|-f}{2} \ge 0$$
$$f = f^+ - f^-$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} fdx := \int_{\mathbb{R}^n} f^+dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-dx$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^-dx$$
$$f \in \mathcal{R}\left(\mathbb{R}^n\right) \Leftrightarrow f^+, f^{-1} \in \mathcal{R}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

למה:

$\int_{\mathbb{R}^n} fdx$ לא תלוי בבחירה של הכיסוי$\left\{\Omega_j\right\}$.

הוכחה

נניח כי $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega'_j$
$$\forall j \exists i : \Omega'_j \subset \Omega_i$$
$$f \ge 0 : \int_{\Omega'_j} fdx \le \int_{\Omega_i} fdx \le \int_{\mathbb{R}^n} fdx$$
ולכן $\left(\Omega_j\right)\int_{\mathbb{R}^n} fdx \le \left(\Omega_j\right)\int_{\mathbb{R}^n} fdx$ ובנוסף $\left(\Omega'_j\right)\int_{\mathbb{R}^n} fdx \le \left(\Omega'_j\right)\int_{\mathbb{R}^n} fdx$

דוגמא

$E=\int_{0}^{\infty}e^{-x^{2}}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^{2}}dx$

$$2E=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}e^{-x^{2}}dx$$

$$\begin{aligned}RE^{2} &= \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}e^{-x^{2}}dx\int_{-A}^{A}e^{-y^{2}}dy\\ &= \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\int_{-A}^{A}e^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}dxdy\\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R}e^{-r^{2}}rdrd\varphi\\ &= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{r^{2}}|_{0}^{R}\right)2\pi=\pi\end{aligned}$$

$E^{2}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow E=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$

פונקציה לא חסומה

f לא חסומה סביבה של a.

$\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ כך שu_j סביבה של a.

$u_{j+1}\subset u_j$

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}u_j=\{a\}$$

$\forall\epsilon>0\exists j:u_j\subset B\left(a,\epsilon\right)$.

נניח שf אינטגרבילית בכל $\Omega\backslash u_j$, $f\geq0$, f אינטגרבילית אם:

$\exists\lim_{j\to\infty}\int_{\Omega\backslash u_j}f\left(x\right)dx=\sup_{j}\int_{\Omega\backslash u_j}fdx:=\int_{\Omega}f\left(x\right)dx<\infty$

$f=f_{+}-f_{-}\Rightarrow\int_{\Omega}fdx=\int_{\Omega}f_{+}dx-\int f_{-}dx$

$\frac{m}{r^{\alpha}}\leq|f\left(x\right)|\leq\frac{M}{r^{\alpha}}$

$r=||x||$

$\int_{|x|\geq R_0}\frac{1}{r^{\alpha}}dx=\int_{\varphi_1,..,\varphi_{n-1}}\int_{R_0}^{\infty}\frac{1}{r^{\alpha}}A\left(\varphi_1,..,\varphi_{n-1}\right)drd\varphi_1...\varphi_{n-1}=c\int_{R_0}^{\infty}\frac{r^{n-1}}{r^{\alpha}}dr$

$\boxed{\infty\text{: }\alpha>n\Leftrightarrow\int_{|x|>R_0}\frac{1}{||x||^{\alpha}}dx<\infty}$

$\boxed{0\text{: }\alpha<n\Leftrightarrow\int_{||x||<R_0}\frac{1}{||x||^{\alpha}}dx<\infty}$