תרגיל: יהיו $v_1, ..., v_n$ וקטורים בממ"פ. נגדיר מטריצה (מטריצת גרם): $A_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.
כלומר

$$A = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \langle v_1, v_3\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \langle v_2, v_3\rangle & \cdots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \langle v_3, v_1\rangle & \langle v_3, v_2\rangle & \langle v_3, v_3\rangle & \cdots & \langle v_3, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \langle v_n, v_3\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}$$

הוכיחו: $v_1, ..., v_n$ ת"ל אמ"ם $|A| = 0$.
פתרון: $\Leftarrow$ אם $v_1, .., v_n$ אז יש k כך שv_k הוא צירוף של האחרים.
בלי הגבלת הכלליות נניח שזה n.

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

לכל i,

$$\langle v_n, v_i\rangle = \langle \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j, v_i\rangle = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \langle v_j, v_i\rangle$$

כלומר, קיבלנו שהשורה הn היא צירוף של השורות הקודמות עם המקדמים α_j.
זה אומר שהמטריצה לא הפיכה.
$\Longrightarrow$ נניח שהמטריצה לא הפיכה. זה אומר שהשורות ת"ל, אפשר להניח בה"כ ש

$$R_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j R_j$$

לפי הכיוון השני, אנחנו מבינים שאנחנו רוצים להוכיח ש$v_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j$
שקול:

$$v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j = 0$$

זה שקול להוכיח ש

$$\langle v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j, v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j\rangle = 0$$

מהנתון על השורות אנחנו מקבלים שלכל $1 \le i \le n$

$$\langle v_n, v_i\rangle = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \langle v_j, v_i\rangle$$

נעביר אגף ונכניס את הצירופים לתוך המכפלה הפנימית. נקבל:

$$\langle v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j, v_i \rangle = 0$$

לכל $1 \leq i \leq n$
נשים לב ש$v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j$ הוא צירוף של $v_1, .., v_n$.
לכן

$$\langle v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j, v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j, v_i \rangle = \sum 0 = 0$$

β_i הוא המקדם- זה לא משנה מה הוא.
מש"ל.

נורמות

הגדרה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R} \vee \mathbb{C}$. נורמה היא פונקציה $V \to \mathbb{R}$, שמסמנים ב $||v||$ שמקיימת:

1. $||v|| \geq 0$ ו$||v|| = 0$ רק עבור $v = 0$.
2. $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$.
3. אי שוויון המשולש: $||v + u|| \leq ||v|| + ||u||$

הנורמה המושרית ממכפלה פנימית: יהי V ממ"פ, נגדיר

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

דוגמא: ב$\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית

$$|| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} || = \sqrt{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle} = \sqrt{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3} = \sqrt{14}$$

הערה: וקטור יקרא "מנורמל" אם הנורמה שלו שווה ל1.
לכל וקטור $v \neq 0$, קיים "נירמול". כלומר וקטור ב$span\{v\}$ שהוא מנורמה 1. מחשבים אותו ע"י

$$\tilde{v} = \frac{1}{||v||} v$$

לדוגמא:

$$\widetilde{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

הגדרה: יהיו v, u שני וקטורים בממ"פ מעל הממשיים. הזווית בין v ל-u מוגדרת להיות הזווית היחידה בין 0 ל-π שמקיימת

$$\cos\theta = \frac{\langle v, u\rangle}{||v|| \cdot ||u||}$$

יש לזה משמעות בגלל אי שוויון שתוכיחו/הוכחתם שאומר שהביטוי הנ"ל הוא בין 1 ל--1.
הגדרה: וקטורים v, u יקראו אורתוגנלים/מאונכים אם $\langle v, u\rangle = 0$.
קבוצה אורתוגנלית היא קבוצה של וקטורים שכל שניים שונים מאונכים אחד לשני.
לדוגמא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הגדרה: קבוצה תקרא "אורתונורמלית" אם היא אורתוגונלית וכל וקטור בה הוא מנורמל, כלומר, מנורמה 1.
דוגמא:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הערה: אם v ו-u מאונכים, אז גם כפולה בסקלר שלהם.
הוכחה:

$$\langle \alpha u, \beta v\rangle = \alpha\overline{\beta}\langle v, u\rangle = \alpha\overline{\beta} \cdot 0 = 0$$

1. (משפט פיתגורס) יהא V ממ״פ. יהיו $v, u \in V$ אזי אם v, u או״ג אז $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

תרגיל: הוכיחו שמעל הממשיים גם הכיוון השני נכון, ומעל המרוכבים לא.
פתרון: מעל המרוכבים ניתן את הדוגמא הבא: הממ"פ יהי $\mathbb{C}$ עם הממ"פ $\langle x, y\rangle = x\overline{y}$. אז נקח $x = 1, y = i$. אפשר לראות שהם לא מאונכים. אבל

$$2 = ||1 + i||^2 = ||1||^2 + ||i||^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

מעל הממשיים:

$$||u + v||^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle$$

$$||v||^2 = \langle v, v\rangle$$

$$||u||^2 = \langle u, u\rangle$$

נתון שיש שוויון אז נקבל ש

$$\langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle = 0$$

בגל שאנחנו מעל הממשיים יש סימטריות ולכן

$$2\langle u, v\rangle = 0$$

כלומר

$$\langle u, v\rangle = 0$$

כלומר u וv מאונכים.
תרגיל: יהי V ממ"פ, ו$\{v_1, .., v_n\}$ בסיס או"נ. הוכיחו שלכל $c_1, .., c_n \in \mathbb{C}$ קיים וקטור $v \in V$ כך ש

$$\langle v, v_i\rangle = c_i$$

פתרון: נקח $v = \sum c_i v_i$

$$\langle v, v_j\rangle = \langle \sum c_i v_i, v_j\rangle = \sum c_i \langle v_i, v_j\rangle = c_j$$

כל שניים שונים- המכפלה שלהם היא 0. וכל וקטור עם עצמו המכפלה שלו היא 1.
תרגיל: יהי V ממ"פ ו$\{v_1, .., v_n\}$ בסיס. הוכיחו שלכל $c_1, .., c_n \in \mathbb{C}$ קיים וקטור $v \in V$ כך ש

$$\langle v, v_i\rangle = c_i$$

פתרון: נקח בסיס B או"נ. $B = \{u_1, .., u_n\}$.

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k} u_k$$

אז אנחנו מחפשים v שמקיים:

$$\langle v, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k} u_k\rangle = c_i$$

לכל i

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha_{i,k}}\langle v,u_k\rangle = c_i$$

הגענו למערכת של n משוואות בn נעלמים.

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha_{i,k}}x_k = c_i$$

בשביל שלמערכת יהיה פתרון (לכל $c_1,..,c_n$) צריך שמטריצת המקדמים תהיה הפיכה. מספיק להוכיח שהצמוד של המטריצה הוא הפיך. כי אם A הפיכה אז גם $\overline{A}$ (ע"י הצמדת כל רכיב בהופכית).

$$R_1 = (\alpha_{11},...,\alpha_{1,n}) = [v_1]_B$$

וכך כל שורה i שווה ל $[v_i]_B$
מכיוון ש$v_1,..,v_n$ בת"ל אז וקטורי הקורדינטות בת"ל והמטריצה הפיכה.
יש פתרון למערכת, וקטור

$$(y_1,..,y_n)$$

מהתרגיל הקודם, קיים $v\in V$ כך ש

$$\langle v,u_i\rangle = y_i$$

מש"ל.
דרך 2: $v=\sum\alpha_i v_i$.

$$\langle v,v_j\rangle = c_j$$

$$\langle\sum\alpha_i v_i,v_j\rangle = c_j$$

$$\sum\alpha_i\langle v_i,v_j\rangle = c_j$$

יש לנו n משוואות בn נעלמים, הנעלמים זה הα_i. מטריצת המקדמים היא מטריצת גראם של בסיס, ולכן הפיכה (דפי התרגיל שעשינו היום). ולכן יש פתרון למערכת.

גראם-שמידט

יהא V ממ"פ ו- $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ קבוצה בת"ל. תהליך גרם שמידט מעביר את B אל קבוצה $B^{'}=\{w_1',\dots,w_n'\}$ אורתונורמלית.

האלגוריתם:

$$w_1 := v_1$$

$$w_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{||w_1||^2} w_1$$

$$w_3 := v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{||w_1||^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{||w_2||^2} w_2$$

$$\vdots$$

$$w_i := v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, w_k\rangle}{||w_k||^2} w_k$$

בסוף מנרמלים את הוקטורים שהתקבלו.

תרגיל: הפכו את הקבוצה $\left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ לקבוצה אורתונורמלית.

פתרון:

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left|\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|\right|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left|\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|\right|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left|\left| \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \right|\right|^2} \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0.5}{1.5} \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$w'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w'_2 = \frac{1}{\sqrt{1.5}} \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}, w'_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$tamarnachshoni@gmail.com$