לינארית 1 - תרגיל 1 - מרוכבים

10.2018

בראש העבודה שלכם יש צורך לרשום את הפרטים הבאים:

1. **שם מלא + ת.ז (כבר קרה שהיו שני סטודנטים עם אותו שם פרטי ושם משפחה).**
2. **מספר תרגיל.**
3. **שם מתרגל/מספר קבוצה.**

שאלה 1. פתור את המשוואות הבאות:

1. $z^3 - 10z^2 + 34z = 0$

פתרון.

$z^3-10z^2+34z = 0 \Rightarrow z\left(z^2-10z+34\right) = 0$ כלומר $z = 0$ או $z^2-10z+34 = 0$

ולפי נסחאת השורשים $z = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot 1\cdot 34}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-36}}{2} = 5 \pm 3i$,

מכאן התשובה הסופית היא $z_1 = 0, z_2 = 5+3i, z_3 = 5-3i$

2. $z^2 - (1-3i)\,z - 2i - 2 = 0$

פתרון.

$$z = \frac{(1-3i) \pm \sqrt{(1-3i)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2i-2)}}{2} = \frac{1-3i \pm \sqrt{2i}}{2} \underset{2i=(1+i)^2}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{1-3i \pm (1+i)}{2}$$

לכן $z_1 = 1-i, z_2 = -2i$

3. $(i+1)(x+iy) = 4+2i$ כאשר x, y ממשיים

פתרון.

$$\begin{aligned} (i+1)(x+iy) &= 4+2i \\ &\Downarrow \\ x-y+(x+y)\,i &= 4+2i \end{aligned}$$

לכן לפי יחידות ההצגה מתקיים

$$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

תרגיל 2. חשב, ללא שימוש במשפט דה מואבר, את הביטויים הבאים:

1. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^8$

פתרון.

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^8=\left(\sqrt{2}\right)^8(1+i)^8=2^4\left((1+i)^2\right)^4=16\,(2i)^4=256$$

2. $\dfrac{5}{3+2i}$

פתרון.

$$\frac{5}{3+2i}=\frac{5}{3+2i}\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{15-10i}{13}=\frac{15}{13}-\frac{10}{13}i$$

3. $\left(1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{34}\right)^{71}$

פתרון.
תחילה נחשב את הסכום

$$1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{34}$$

נשים לב ש-

$$1+i+i^2+i^3=0$$

ובאופן כללי

$$i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}=0$$

מכאן

$$1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{34}=i^{32}+i^{33}+i^{34}=\left(i^4\right)^8+\left(i^4\right)^8i+\left(i^4\right)^8i^2=1+i-1=i$$

לכן

$$\left(1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{34}\right)^{71}=i^{71}=\left(i^4\right)^{17}i^3=-i$$

תרגיל 3. הוכח שכל מספר מרוכב $z=a+bi$ יש הופכי ונגדי.

פתרון.

- נגדי: יהי $z=a+bi$ ניקח את $w=-a-bi$ אז $z+w=a+bi-a-bi=0$ לכן wהוא הנגדי של z.
- הופכי: יהי $z=a+bi$ ניקח את $w=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$ אז

$$zw=(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right)=1$$

לכן w הוא הנגדי של z.

תרגיל 4. הוכח שלכל שני מספרים מרוכבים z_1, z_2(השונים מ-0) מתקיים:

1. $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$

פתרון.

נסמן $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו-$z_2 = a_2 + b_2 i$ אז

$$\begin{aligned}
&|z_1 z_2| \\
=\ &|(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)| \\
=\ &|(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,i| \\
=\ &\sqrt{(a_1a_2-b_1b_2)^2 + (a_1b_2+a_2b_1)^2} \\
=\ &\sqrt{(a_1a_2)^2 + 2(a_1a_2)(b_1b_2) + (b_1b_2)^2 + (a_1b_2)^2 - 2(a_1b_2)(a_2b_1) + (a_2b_1)^2} \\
=\ &\sqrt{(a_1a_2)^2 + (b_1b_2)^2 + (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2} \\
=\ &\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)} \\
=\ &\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}\sqrt{(a_2^2+b_2^2)} \\
&|z_1|\,|z_2|
\end{aligned}$$

2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

פתרון.

נסמן $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו-$z_2 = a_2 + b_2 i$ אז

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}\right| \stackrel{*}{=} \left|\frac{1}{z_2\overline{z_2}}\right| |z_1\overline{z_2}| = \frac{1}{|z_2|\,|\overline{z_2}|}\,|z_1|\,|\overline{z_2}| = \frac{1}{|z_2|\,|z_2|}\,|z_1|\,|z_2| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

* המעבר נובע מזה ש-$\frac{1}{z_2\overline{z_2}}$ הוא מספר ממשי ומתקיים $|kz| = k\,|z|$

תרגיל 5. בסדרה הנדסית נתון $a_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, a_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ הוכח שלכל n טבעי סכום $6n$ האיברים הראשונים שווה ל-0.

פתרון.

תחילה נמצא את מנת הסדרה

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

לכן סכום $6n$האיברים הראשונים שווה ל-

$$S_{6n} = \frac{a_1\left(q^{6n}-1\right)}{q-1} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1}$$

כעת נחשב את

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{6}=\left(1\cdot cis\left(60^{\circ}\right)\right)^{6}=cis\left(360^{\circ}\right)=1$$

לכן $S_{6n}=0$

תרגיל 6. פתור, בעזרת משפט דה מואבר, את המשוואות הבאות:

1. $z^{7}=1$

פתרון.

$$z^{7}=1=cis\left(0^{\circ}\right)$$

לכן

$$z_{k}=\sqrt[7]{cis\left(0^{\circ}\right)}=cis\left(\frac{0^{\circ}+360^{\circ}k}{7}\right)$$

2. $z^{4}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}$

פתרון.

נשים לב שמתקיים

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}=\left(1cis\left(45^{\circ}\right)\right)^{10}=cis\left(450^{\circ}\right)=cis\left(90^{\circ}\right)$$

לכן

$$\begin{gathered} z^{4}=cis\left(90^{\circ}\right)\\ \Downarrow\\ z_{k}=cis\left(\tfrac{90^{\circ}+360^{\circ}k}{4}\right)\end{gathered}$$

תרגיל 7. הוכח שסכום שורשי היחידה מסדר n שווה ל-0. (שורשי היחידה מסדר n הם פתרונות המשוואה $z^{n}-1=0$)

פתרון.

$$z^{n}=1=cis\left(0\right)$$

לכן שורשי היחידה הם

$$z_{k}=cis\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\ \ k=0,\ldots,k-1$$

נשים לב ששורשי היחידה הם סדרה הנדסית עם מנה $cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)$לכן סכומם שווה ל-

$$\sum_{k=1}^{n}z_{k}=\frac{a_{1}\left(q^{n}-1\right)}{q-1}=\frac{cis\left(0\right)\left(cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{n}-1\right)}{cis\left(\frac{2\pi k}{n}\right)-1}=\frac{1\left(1-1\right)}{cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)-1}=0$$

בהצלחה!!