מד"ר - תרגול 2

5 בנובמבר 2013

תרגילים יפורסמו באתר של פרופ שיף: u.math.ac.il/~schiff/Teaching/88240.

משוואות שניתנות להמרה למשוואות שניתן להפריד משתנים משוואות מהצורה $y\prime = f(ax+by+c) \quad (a,b\neq 0)$. נציב $z=ax+by+c \Leftarrow z\prime = a+by\prime \Leftarrow y\prime = \frac{z\prime-a}{b}$ ונציב בחזרה לקבל $\frac{z\prime-a}{b}=f(z)$. נוכל לרשום אותה בתור

$$\frac{z\prime}{bf(z)+a}=1$$

ולפתור ע"י הפרדת משתנים:

$$\begin{aligned}
\int\frac{dz}{bf(z)+a} &= \int 1dx+C\\
g(z)=\int\frac{dz}{bf(z)+a} &= x+C\\
z(x) &= g^{-1}(x+c)\\
y(x) &= \frac{g^{-1}(x+c)-c-ax}{b}
\end{aligned}$$

לכן $\boxed{y(x)=\frac{g^{-1}(x+\widetilde{c})-c-ax}{b}}$.

תרגיל:

$y\prime = 2x+y-1$

פתרון:

$$
\begin{aligned}
z(x) &= 2x + y - 1 \\
g(z) &= \int \frac{dz}{z+2} = \ln \mid z+2 \mid \\
g^{-1}(z) &= e^{|z|} - 2 \\
y(x) &= \frac{e^{x+\tilde{c}} - 2 + 1 - 2x}{1} \\
y(x) &= e^{x+c} - 2x - 1 \\
y\prime &= e^{x+c} - 2 \\
2x + \overset{||}{y} - 1 &= e^{x+c} - 2
\end{aligned}
$$

כדרוש.

משוואות הומגניות לא ליניאריות מסדר ראשון

הגדרה: פונקציה $f(x,y)$ נקראת הומוגנית מסדר k אם לכל $\lambda > 0$ מתקיים השִיוויון $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$.

דוגמה:

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

היא פונקציה הומוגנית מסדר 2 כי $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2 = \lambda^2(x^2 - y^2) = \lambda^2 f(x,y)$.

דוגמה 2:

$$f(x,y) = x^2 - y$$

איננה הומוגנית כי $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x^2 - \lambda y = \lambda(\lambda x^2 - y)$

הגדרה: אם ניתן לכתוב את המד"ר $y\prime = f(x,y)$ בצורה $y\prime = g(\frac{y}{x})$ אז היא נקראת מד"ר הומוגנית. אם $f(x,y)$ הומוגנית אז בהכרח הדבר מתקיים.

תרגיל: $y\prime = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$

פתרון:

תחילה נבדוק שהפו' הומוגנית. נציב:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 y^2 - \lambda^2 x^2}{2\lambda^2 xy} = \lambda^0 f(x,y)$$

$f(x,y) \Leftarrow$ הומוגנית מסדר 0.

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2xy} = \frac{\frac{y^2}{x^2}-1}{2\frac{y}{x}} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

כאשר

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{t^2-1}{2t} \\
z(x) &= \frac{y}{x} \\
z\prime &= \frac{y\prime x - y}{x^2} \\
y\prime x &= x^2 z\prime + y \\
y\prime &= xz\prime + \frac{y}{x} = xz\prime + z \\
xz\prime + z &= \frac{z^2-1}{2z} \\
xz\prime &= \frac{z^2-1-2z^2}{2z} = \frac{-z^2-1}{2z} \\
\frac{2zz\prime}{z^2+1} &= -\frac{1}{x} \\
\int \frac{2zdz}{z^2+1} &= \int \frac{1}{x}dx + C \\
\ln(z^2+1) &= -\ln \mid x \mid + C \\
z^2+1 &= e^{-\ln|x|+C} = cx \quad , c \neq 0 \\
y^2+x^2 &= cx \\
y^2 &= cx - x^2
\end{aligned}$$

מד"ר ליניאריות מסדר I מהצורה $y\prime + p(x)y = q(x)$. אם $q(x) = 0$, המשוואה הומוגנית והפתרון שלה:

$$\begin{aligned}
y\prime + p(x)y &= 0 \\
y\prime &= -p(x)y \\
\frac{dy}{y} &= -p(x)dx \\
ln|y| &= -\int p(x)dx + c \\
y &= c \cdot e^{-\int p(x)dx} \quad , (c \neq 0)
\end{aligned}$$

הגדרה: פתרון של מד"ר לא הומוגנית ($q(x) \neq 0$) שווה לפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית (מציבים $q(x) = 0$) + פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית.

שיטת וריאציית המקדמים הפתרון הכללי של המדר יהיה מהצורה $y(x) = C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$.
נמצא את $C(x)$ באופן כללי:

$$C\prime(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

וקיבלנו מד"ר מסדא ראשון שניתן להפריד בה משתנים:

$$\begin{aligned} C\prime(x) &= q(x)e^{\int p(x)dx} \\ dC &= q(x)e^{\int p(x)dx}dx \\ \int dC &= \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c \end{aligned}$$

הפתרון הכללי של $y\prime + p(x)y = q(x)$ ניתן להצגה באמצעות הנוסחה:

$$\boxed{y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{p(x)dx}dx + c\right)}$$

תרגיל: $y\prime + y = x$

פתרון:

$$y(x) = e^{-\int dx}\left(\int xe^{\int dx}dx + c\right) = e^{-x}\left(\int xe^{x}dx + c\right) \underset{f=x}{} \underset{g\prime=e^x}{=} e^{-x}\left(xe^{x} - e^{x} + c\right) = e^{-x}(xe^{x}-e^{x}+c) =$$

.

ואכן:

$$y\prime 1 - ce^{x} \Rightarrow y\prime + y = 1 - ce^{-x} + x - 1 + ce^{-x} = x$$

תרגיל: $y\prime + y = \sin x$

פתרון: $p(x) = 1, q(x) = \sin x$ ז"א:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\int dx}\left(\int \sin x e^{\int dx} dx + c\right) = e^{-x}(\underbrace{\int \sin x e^{x} dx}_{I} + c) \\
\int \sin x e^{x} &= \sin x e^{x} - \int \cos x e^{x} dx \\
&= \sin x e^{x} - \cos x e^{x} + \underbrace{- \int \sin x e^{x} dx}_{I} \\
2I &= \sin x e^{x} - \cos x e^{x} \\
I &= \frac{(\sin x - \cos x) e^{x}}{2} \\
y(x) &= \frac{\sin x - \cos x}{2} + c e^{-x}
\end{aligned}
$$

תרגיל:

1. מצאו פתרון כללי למשוואה $y\prime = \frac{x^2-y}{x}$.
2. מצאו פתרון פרטי המקיים $y(1) = 5$.

פתרון:

$$
\begin{aligned}
y\prime &= \frac{x^2 - y}{x} \\
y\prime &= x - \frac{1}{x} y \\
y\prime + \frac{1}{xy} &= x \\
y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c \right) \\
&= e^{-\ln|x|}\left(\int x e^{\ln|x|} dx + c\right) \\
&= \frac{1}{|x|} \left(\int x|x| dx + c \right) \\
&= \frac{1}{|x|}\left(\frac{|x|^3}{3} + c\right) \\
&= \frac{x^2}{3} + \frac{c}{|x|}
\end{aligned}
$$

ידוע לנו

$$\begin{aligned} 5 &= y(1) = \frac{1}{3} + c \\ c &= \frac{14}{3} \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{x^2}{3} + \frac{14}{3|x|} \end{aligned}$$

תרגיל: $y\prime = x - xy$

פתרון:

$$\begin{aligned} y\prime + xy &= x \\ y(x) &= e^{-\int xdx}\left(\int xe^{\int xdx}dx + c\right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int xe^{x^2/2}dx + c\right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{\frac{x^2}{2}} + c\right) \\ &= \boxed{1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}} \end{aligned}$$

משוואת ברנולי

$$\begin{aligned} y\prime &= p(x)y + Q(x)y^n \\ \frac{y\prime}{y^{(n)}} &= p(x) \cdot y^{(1-n)} + Q(x) \\ z(x) &= y^{(1-n)} \\ z\prime &= (1-n)y\prime \cdot y^{-n} \\ \frac{z\prime}{1-n} &= P(x) \cdot z + Q(x) \\ z\prime &= (1-n)p(x)z + (1-n)Q(x) \end{aligned}$$

תרגיל:

$$y\prime = xy + xy^4$$

פתרון: $n=4$ אז נציב $z(x)=y^{-3}$ לקבל:

$$\begin{aligned}
z\prime &= -3xz-3x \\
z\prime+3xz &= -3x \\
z(x) &= e^{-\int 3xdx}\left(-\int 3xe^{\int 3xdx}dx+c\right) \\
&= e^{\frac{-3}{2}x^2}\left(-\int 3xe^{1.5x^2}dx+c\right) \\
&= e^{-\frac{3}{2}x^2}\left(-e^{\frac{3}{2}x^2}+c\right) \\
&= -1+ce^{-1.5x^2} \\
\Rightarrow y(x) &= \frac{1}{\sqrt[3]{z}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(-1+ce^{-1.5x^2})}}
\end{aligned}$$

ואכן:

$$\begin{aligned}
y\prime &= \frac{1}{3}(1-+ce^{-1.5x^2})^{-\frac{2}{3}}(-3xce^{-1.5x^2}) \\
xy+xy^4 &= y(x+y^3)=\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\left(x+\frac{x}{z}\right) \\
&= y\prime
\end{aligned}$$