תרגיל 3 – אינפי 2

.1

a. מבין כל המשולשים ישרי הזוית ברביע הראשון אשר נוצרים על ידי ציר x, ציר y וישר העובר דרך הנקודה $(1,2)$, מצא משולש עם שטח מינימלי. מהו השטח המקסימלי האפשרי למשולש כזה?

תשובה: על מנת שישר יעבור דרך הנקודה הנ"ל הוא חייב להיות מהצורה $y=m(x-1)+2$. על מנת שהמשולש יהיה ברביע הראשון חייב להתקיים $m<0$. נחשב את השטח של משולש כזה כפונקציה של m. שטח משולש ישר זוית הוא מכפלת הניצבים חלקי 2. החיתוך עם הצירים הוא בנקודות $(0,-m+2)$ ו $(-\frac{2}{m}+1,0)$ ולכן שטח המשולש הינו $\frac{1}{2}(-\frac{2}{m}+1)(-m+2)=-(\frac{m}{2}+\frac{2}{m}-2)$ קל לראות שבאופן סימטרי כאשר השיפוע מתקרב לאפס או מינוס אינסוף, שטח המשולש מתקרב לאינסוף. נגזור על מנת למצוא נקודת מינימום, (הרי הקטע בו אנו מחפשים את המינימום הוא פתוח $(-\infty,0)$ והפונקציה גזירה בו ולכן בנקודת המינימום הנגזרת חייבת להתאפס). הנגזרת הינה $-(\frac{1}{2}-\frac{2}{m^2})$ ולכן הנקודה היחידה בה היא מתאפסת הינה $m=-2$. נוודא שזו אכן נקודת מינימום על ידי נגזרת שנייה $-\frac{2}{3m^3}$ והיא אכן חיובית ב $m=-2$ ולכן זו נקודת מינימום. השטח במקרה זה הינו $-(-\frac{2}{2}-\frac{2}{2}-2)=4$.

כפי שהזכרנו, קל לראות שכאשר m שואף לאפס או מינוס אינסוף שטח המשולש שואף לאינסוף ולכן אין שטח מקסימלי למשולש כזה.

b. מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $f(x)=x(x-1)^2$ בקטע $[-9,10]$.

תשובה: הפונקציה גזירה בכל הממשיים ונגזרת הפונקציה הינה $f'(x)=(x-1)^2+2x(x-1)=(x-1)\left[(x-1)+2x\right]=(x-1)(3x-1)$ היא מתאפסת בנקודות $1,\frac{1}{3}$ הנקודות האלה אינן בקטע הנתון ולפיכך המינימום והמקסימום חייבים להיות בקצות הקטע. וכל שנותר הוא להציב ולכן המינ' והמקס' הם $f(9), f(10)$.

2. חקור חקירה מלאה (תחום הגדרה, זוגיות, תחומי עלייה וירידה ונק' קיצון, תחומי קמירות מעלה או מטה ונקודות פיתול, אסימ', חיתוך עם הצירים וציור הגרף)

a. $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$

פתרון:

תחום הגדרה:

הפונקציה מוגדרת לכל x.

זוגיות: הפונקציה אינה זוגיות ואינה אי זוגית $f(2)=2e^{-1}\neq\pm 2e^{-3}=\pm f(-2)$

תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון:

נסתכל על הפונקציה בשלושה תחומים. כאשר $x>1$ מתקיים $f(x)=xe^{1-x},\ f'(x)=(1-x)e^{1-x}$. בתחום זה $1-x$ שלילי ולכן הנגזרת שלילית והפונקציה יורדת בתחום זה. כאשר $0<x<1$ מתקיים $f(x)=xe^{x-1},\ f'(x)=(1+x)e^{x-1}$. בתחום זה $1+x$ חיובי ולכן הפונקציה עולה. כאשר $x<0$ מתקיים $f(x)=-xe^{x-1},\ f'(x)=-(1+x)e^{x-1}$. בתחום זה, כאשר $x>-1$ אז $-(1+x)<0$ ולכן הפונקציה יורדת. כאשר $x<-1$ אז $-(1+x)>0$ ואז הפונקציה עולה. כאשר $x=-1$ הנגזרת מתאפסת ולכן זו נקודת מינימום (הפונקציה רציפה, יורדת עד הנקודה ועולה אחרי הנקודה). הנקודה $x=1$ נקודת מקסימום מאותה סיבה.

תחומי קמירות:

נחשב נגזרת שנייה בתחומים הנ"ל. כאשר $x>1$ מתקיים $f''(x)=-(2-x)e^{1-x}$. $f''(x)<0$ עבור $1<x<2$ לכן הפונקציה שם קמורה כלפי מטה. $f''(x)>0$ עבור $x>2$ ולכן הפונקציה שם קמורה כלפי מטה. הנקודה $x=2$ הינה נקודת פיתול לכן (הנגזרת השנייה מחליפה בה סימן והפונקציה גזירה פעמיים בסביבה).

כאשר $0<x<1$ $f''(x)=(2+x)e^{x-1}$ ולכן $f''(x)>0$ ולכן הפונקציה קמורה כלפי מעלה.

עבור $x=1$ הפונקציה אינה גזירה, כי הגבול הימני של הנגזרת הוא $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}(1-x)e^{1-x}=0$ והגבול השמאלי הינו $\lim_{x\to 1^1} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}(1+x)e^{x-1}=2$ אבל לנגזרת לא יכולה להיות נקודת אי רציפות ממין ראשון.

לעומת זאת הפונקציה רציפה ב $x=1$, עולה משמאל ויורדת מימין ולכן זו נקודת מקסימום.

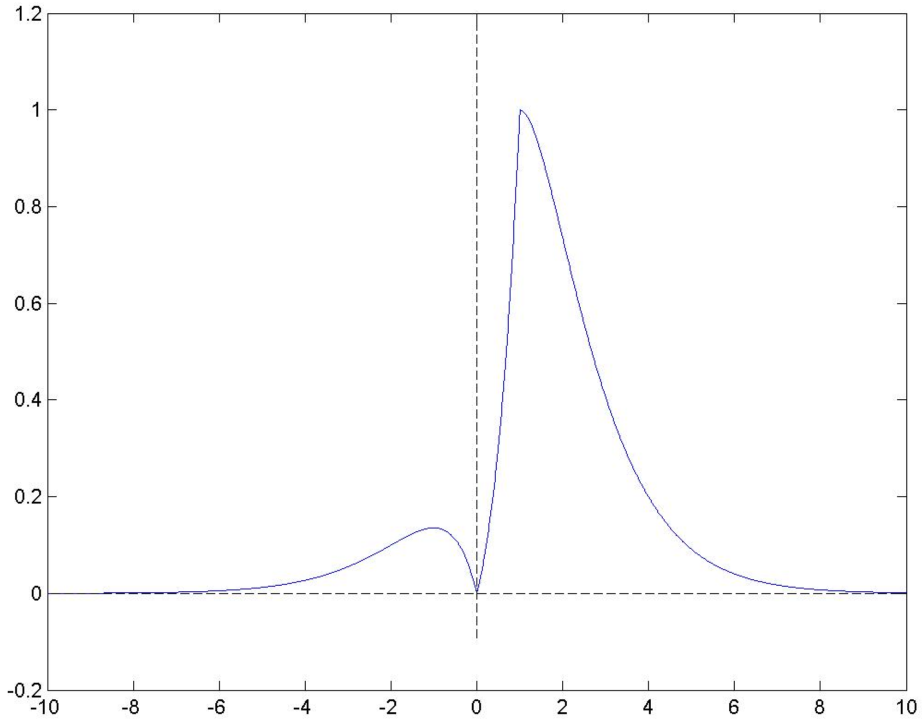
אסימפטוטות:

הפונקציה רציפה ומוגדרת בכל ערך ולכן אין לה אסימ' אנכית. נחשב אסימפטוטות משופעות:
$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}e^{1-x}=0$, $b=\lim_{x\to\infty} f(x)-0\cdot x=\lim_{x\to\infty}xe^{1-x}=0$ ולכן ציר ה x הינו אסימפטוטה משופעת באינסוף. במינוס אינסוף $a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}-e^{x-1}=0$,
$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)-0\cdot x=\lim_{x\to-\infty}-xe^{x-1}=0$ ולכן ציר ה x הינו אסימפטוטה גם במינוס אינסוף.

חיתוך עם הצירים:

$f(x)=|x|e^{-|x-1|}=0\Leftrightarrow |x|=0\Leftrightarrow x=0$ ולכן הנקודה $(0,0)$ היא נקודת חיתוך יחידה עם הצירים.

תרפיה בתרשים:



.b $f(x)=x-2\arctan x$

פתרון:

תחום הגדרה: הפונקציה מוגדרת לכל x.

זוגיות: tg אי זוגית ולכן $\arctan$ אי זוגית (שימו לב שהדבר אינה נכון עבור פונקציות זוגיות. הרי לפונקציה זוגית אין הופכית בסביבה של אפס כי היא לא חח"ע בסביבה של אפס). x כמובן אי זוגית וכך גם כל צירוף לינארי של שתי הפונקציות האלה ולכן $f(x)$ הינה פונקציה אי זוגית.

תחומי עליה ירידה ונקודות קיצון:

הפונקציה גזירה בכל הממשיים, לכן בנקודות קיצון הנגזרת חייבת להתאפס. $f'(x)=1-\dfrac{2}{1+x^2}$ היא מתאפסת בשתי נקודות $x=\pm 1$. היא חיובית כאשר $|x|>1$ ושלילית כאשר $|x|<1$ ולכן הפונקציה המקורית עולה כאשר $|x|>1$ ויורדת כאשר $|x|<1$. בנוסף ניתן ללמוד מכך ש $x=1$ נקודת מינימום ו $x=-1$ נקודת מקסימום.

תחומי קמירות:

נגזור פעם שנייה $f''(x) = -\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}$ ולכן הפונקציה קמורה כלפי מטה עבור $x > 0$ וקמורה כלפי מעלה עבור $x < 0$. הנגזרת השנייה מחליפה סימן בנקודה אפס ולכן זוהי נקודת פיתול בהכרח.

אסימפטוטות:

הפונקציה רציפה לכל x ולכן אין לה אסימפטוטות אנכיות.

$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}(1 - \frac{2\arctan x}{x}) = 1$ לכן יש לה אסימפטוטה משופעת באינסוף עם שיפוע 1.

מכיוון שהיא אי זוגית גם במינוס אינסוף יש לה אסימפטוטה משופעת באותו השיפוע. (שימו לב שאם הפונקציה הייתה זוגית, השיפוע במינוס אינסוף היה מינוס השיפוע באינסוף). נמשיך לחשב את האסימפטוטה: $b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - ax\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x - 2\arctan x - x\right) = \pi$. במינוס אינסוף הקבוע הינו $-\pi$ (שימו לב: בפונקציה זוגית הקבוע היה אותו קבוע במינוס אינסוף).

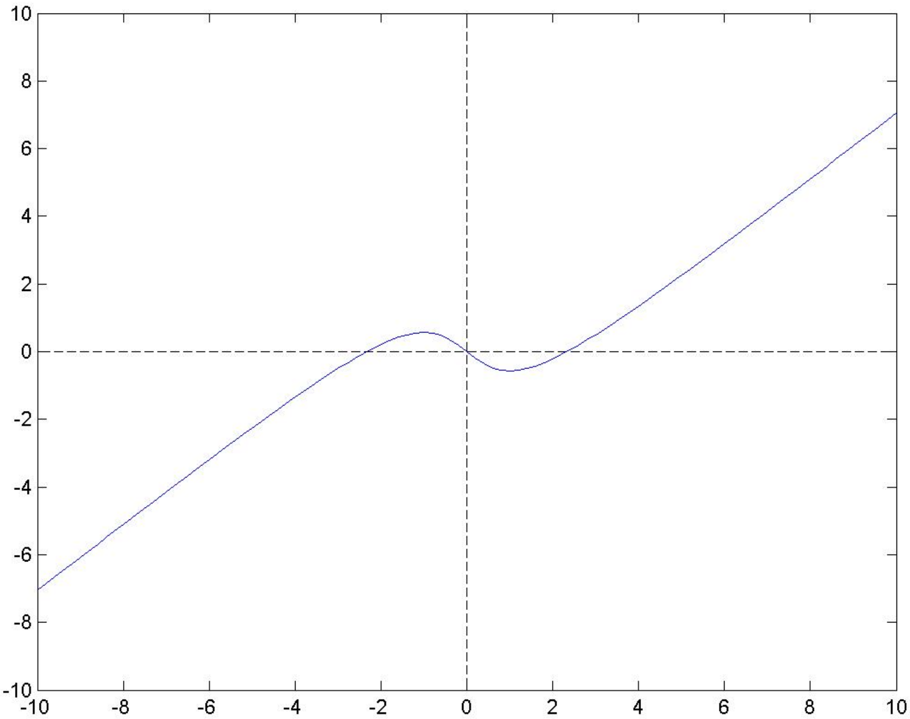
ולכן האסימפטוטות של הפונקציה הן $y = x + \pi$ באינסוף ו $y = x - \pi$ במינוס אינסוף.

חיתוך עם הצירים:

כאשר $x = 0$ הפונקציה שווה אפס ולכן $(0,0)$ היא נקודת חיתוך של הצירים. לא נוכל לחשב במדויק את שאר נקודות החיתוך עם ציר x אך נדע בדיוק כמה הן, ובערך היכן הן נמצאות. מכיוון שהנגזרת מתאפסת בדיוק פעמיים לא יכולות להיות יותר מ3 נקודות בהן הפונקציה מתאפסת (משפט רול). מצאנו אחת, נוכיח שקיימות עוד 2. אנו יודעים שגבול הפונקציה באינסוף הוא אינסוף ולכן הפונקציה חיובית החלק ממקום מסוים והלאה, לכן קיים $a > 1$ כך ש $f(a) > 0$. נציב $f(1) = 1 - 2\frac{\pi}{4} < 0$.

לפי משפט ערך הביניים קיים $b \in (1, a)$ כך ש $f(b) = 0$ ומתוך אי זוגיות $f(-b) = 0$ ומצאנו שתי נקודות כאלה כנדרש.

תרפיה בתרשים:



3. ידוע כי $\sin(\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4})$. חשב את הפונקציה $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}$ בכל נקודה פרט ל $x=-1$

תשובה: נגזור את הפונקציה

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\frac{-(1+x)-(1-x)}{\left(1+x\right)^2}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-2}{(1+x)^2+\left(1-x\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-2}{2(1+x^2)}=0$$

לפיכך הפונקציה עצמה קבועה בקטעים בה היא גזירה. חשוב לשים לב, מכיוון שהפונקציה אינה מוגדרת בנקודה -1 יכול להיות שהערך הקבוע שלה שונה כאשר $x>-1$ וכאשר $x<-1$.

ידוע $\sin(\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4})$ ולכן $tg\frac{\pi}{4}=1$ ולכן $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$. ידוע ש $\sin 0=0$ ולכן 0 ולכן $tg0=0$ ולכן $\arctan 0=0$. ולכן $f(0)=\arctan 0+\arctan 1=\frac{\pi}{4}$. ולכן עבור $x>-1$ הפונקציה היא הקבועה $\frac{\pi}{4}$. כעת, נסתכל על הגבול $\lim_{x\to(-1)^-} f(x)$. $\sin(-x)=-\sin x$ ו $\cos(-x)=\cos(x)$ ולכן נובע ש

$tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ ולכן $\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$. ידוע גם ש $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ ו $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ ולכן

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} tgx=-\infty$ ולכן $\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$. לכן

$\lim_{x\to(-1)^-}\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{4}$. אבל הגבול של פונקציה קבועה הוא בהכרח ערך הפונקציה ולכן עבור $x<-1$ הפונקציה היא הקבועה $-\frac{3\pi}{4}$.

4. חשב את האינטגרלים הבאים באמצעות אינטגרציה בחלקים:

a. $\int x\ln^2 xdx$

פתרון: $\int x\ln^2 xdx=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\int\frac{1}{2}x^2 2\ln x\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\int x\ln xdx=$

$$\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx\right]=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$$

b. $\int x^k\ln xdx$

פתרון: $\int x^k\ln xdx=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln x-\int\frac{1}{k+1}x^{k+1}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln x-\frac{1}{(k+1)^2}x^{k+1}+C$

c. $\int\sin(\ln(x))dx$

פתרון: $\int\sin(\ln(x))dx=x\sin(\ln(x))-\int x\cos(\ln(x))\frac{1}{x}dx=x\sin(\ln(x))-\int\cos(\ln(x))dx=$

$$=x\sin(\ln(x))-\left[x\cos(\ln(x))-\int -x\sin(\ln(x))\frac{1}{x}dx\right]=$$

$$=x\sin(\ln(x))-x\cos(\ln(x))-\int\sin(\ln(x))dx$$

ולכן $\int\sin(\ln(x))dx=\frac{1}{2}\left[x\sin(\ln(x))-x\cos(\ln(x))\right]$

d. $\int 2x\arctan xdx$

פתרון: $\int 2x\arctan xdx=x^2\arctan x-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=x^2\arctan x-\int\frac{-1+1+x^2}{1+x^2}dx=$

$$=x^2\arctan x-\left[\int\frac{-1}{1+x^2}dx+\int dx\right]=x^2\arctan x+\arctan x-x+C=$$