88-113
2014, סמסטר ב'
בוחן אמצע סמסטר-פתרון:

משך הבוחן: שעה וחצי
אין שימוש בחומרי עזר
יש לענות על שתיים משלוש השאלות הבאות
ציינו בתחילת המחברת באילו שאלות בחרתם
ערך כל שאלה 50 נקודות

<u>שאלה 1:</u>
יהי $U \subseteq V$ תת-מרחב במרחב נוצר סופית V.

א. (25 נק') הוכיחו שקיימת העתקה לינארית $T:V \to V$ כך ש- $Ker(T)=U$.

ב. (25 נק') הוכיחו שקיימת העתקה לינארית $S:V \to V$ כך ש- $\operatorname{Im}(S)=U$.

<u>פיתרון:</u>
נגדיר $\dim(V)=n, \dim(U)=m \le n$. יהי $\{u_1,\ldots,u_m\}$ בסיס ל-U, נשלים אותו לבסיס עבור V: $\{u_1,\ldots,u_m,\ldots,u_n\}$.

א. נבחר $\{v_1,\ldots,v_{n-m}\}$ תת קבוצת וקטורים **בת"ל** ב-V.

ע"פ משפט ההגדרה קיימת ה"ל $T(u_i)=\begin{cases} 0 & , \ i=1,\ldots,m \\ v_{i-m}, & i=m+1,\ldots,n \end{cases}$.

ונקבל: $Ker(T)=\{v \in V : T(v)=0\} \supseteq sp\{u_1,\ldots,u_m\}=U$.

כמו כן:

$$v \in Ker(T) \Rightarrow T(v)=0 \wedge \exists a_1,\ldots,a_n : v=\sum_{i=1}^n a_i u_i \Rightarrow$$

$$0=T(v)=T(\sum_{i=1}^n a_i u_i)=\sum_{i=1}^n a_i T(u_i)=\sum_{i=m+1}^n a_i T(u_i)=\sum_{i=m+1}^n a_i v_{i-m} \Rightarrow$$

$$a_i=0, \quad \forall i=m+1,\ldots,n \Rightarrow v=\sum_{i=1}^m a_i u_i \in U.$$

ב. נבחר את S להיות מוגדרת ע"י: $S(u_i)=\begin{cases} u_i & , \ i=1,\ldots,m \\ 0, & i=m+1,\ldots,n \end{cases}$ ונקבל:

$\operatorname{Im}(S)=\{S(v) : v \in V\} \supseteq sp\{u_1,\ldots,u_m\}=U$.

כמו כן :

$$v \in \operatorname{Im}(S) \Rightarrow \exists x : S(x)=v \wedge \exists a_1,\ldots,a_n : x=\sum_{i=1}^n a_i u_i \Rightarrow$$

$$v=S(x)=S(\sum_{i=1}^n a_i u_i)=\sum_{i=1}^n a_i S(u_i)=\sum_{i=1}^m a_i S(u_i)=\sum_{i=1}^m a_i u_i \in U$$

שאלה 2:

תהי מטריצה $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\in F^{2\times 2}$. נגדיר העתקה לינארית $T_A : F^{2\times 3}\to F^{2\times 3}$ על-ידי

$T_A(X)=AX,\quad \forall X\in F^{2\times 3}$. (שימו לב לסדר המטריצות עליהן פועלת T_A.)

א. (30 נק') חשבו $\mathrm{Im}(T_A)$.

ב. (20 נק') חשבו $\dim(Ker(T_A))$ ו-$\dim(\mathrm{Im}(T_A))$.

פתרון:

נציין ש-$\dim(F^{2\times 3})=6$ ושאיברי התמונה הם מטריצות Y אשר עבורן קיימת מטריצה X כך ש-Y=AX:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B & C\\ D & E & F\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}A=d\\ B=e\\ C=f\\ D=2d\\ E=2e\\ F=2f\end{cases}.$$

לכן:

$$\mathrm{Im}(T_A)=\left\{\begin{pmatrix}A & B & C\\ D & E & F\end{pmatrix}\in F^{2\times 3}: D=2A, E=2B, F=2C\right\}=\left\{\begin{pmatrix}A & B & C\\ 2A & 2B & 2C\end{pmatrix}: A,B,C\in F\right\}=$$

$$\left\{A\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right\}=sp\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

כלומר: $\dim(\mathrm{Im}(T_A))=3$ וממשפט הדרגה: $\dim(Ker(T_A))=6-3=3$.

שאלה 3:

יהיו $v_3=\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 7\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\ v_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$ וקטורים ב-R^3.

א. (30 נק') עבור הוקטורים $w_3=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix},\ w_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\ w_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ ב-R^2, האם קיימת העתקה לינארית $T:R^3\to R^2$ כך ש- $i=1,2,3$, $T(v_i)=w_i$?

האם היא יחידה? אם כן-מה היא? אם לא-תנו דוגמא.

ב. (20 נק') נחליף את הוקטור השלישי ב-א' ל- $w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. האם כעת קיימת העתקה לינארית $T : R^3 \to R^2$ כך ש- $i = 1,2,3$, $T(v_i) = w_i$?

<u>פתרון:</u>

א. נבדוק תלות לינארית בין וקטורי התחום:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אכן: $3v_1 - 2v_2 = v_3$.

נבדוק האם **אותה התלות** מתקיימת בין וקטורי הטווח:

$$3w_1 - 2w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = w_3 .$$

לכן, ניתן להגדיר ה"ל: $\begin{cases} T(v_1) = w_1 \\ T(v_2) = w_2 \end{cases}$ וממילא: $T(v_3) = w_3$.

T איננה יחידה, היא תלויה בהשלמת $\{v_1, v_2\}$ לבסיס עבור R^3. למשל, אם $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ אז:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{בת"ל} \Rightarrow \text{בסיס} .$$

ביתר פירוט: $(b-a)v_1 + (2a-b)v_2 + (c-2b+a)v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

לכן, אם נגדיר: $\begin{cases} T(v_1) = w_1 \\ T(v_2) = w_2 \\ T(v) = 0 \end{cases}$ אז הה"ל היא

$$T(a,b,c) = (b-a)w_1 + (2a-b)w_2 + (c-2b+a)0 = \begin{pmatrix} b-a \\ 2a-b \end{pmatrix} .$$

ב.לא קיימת, מכיוון שהיא בהכרח לא ליניארית:

$$T(3v_1 - 2v_2) = T(v_3) = w_3 \neq 3w_1 - 2w_2 = 3T(v_1) - 2T(v_2)$$

בהצלחה!