תורת המספרים האלגברית (88798) תשפ"א
תרגיל 7

1. תאר את הפירוק של כל ראשוני בשדה הציקלוטומי $\mathbb{Q}(\zeta_7)$.

2. יהי $K=\mathbb{Q}\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)$. הוכח כי $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}\left[2\cos\frac{\pi}{7}\right]$ וכי

$$p\mathcal{O}_K=\begin{cases}P^3 & : p=7\\ P_1P_2P_3 & : p\equiv \pm 1 \bmod 7\\ P & : p\equiv \pm 2,\pm 3 \bmod 7.\end{cases}$$

3. איך מתפרק כל ראשוני בשדה $\mathbb{Q}\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)$?

4. (א) יהי $K=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$. אם m חפשי מחזקות שלישיות, הוכח כי $d_K=-27m^2$.

   (ב) יהי $p>2$ ראשוני שמקיים $p\equiv 2 \bmod 3$. הוכח כי $p\mathcal{O}_K=P_1P_2$, כאשר $P_1,P_2\lhd\mathcal{O}_K$ שני אידאלים ראשוניים שונים.

   רמז: היעזר בטענות מתרגיל הבית הקודם.

   הערה: אפשר להוכיח, בעזרת תורת שדות המחלקות, שאם K שדה מספרים כך שחבורת גלואה של הסגור הנורמלי שלו אינה אבלית, אזי אי אפשר לאפיין את הראשוניים p המתפצלים לגמרי ב־ $\mathcal{O}_K$ על ידי שום תנאי חפיפה מודולו שום טבעי N. לדוגמא, ראשוני p מתפצל לגמרי ב־ $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})}$ אם ורק אם $p\equiv 1 \bmod 3$ וקיימים $x,y\in\mathbb{Z}$ כך ש־ $p=x^2+27y^2$.

5. יהי $K=\mathbb{F}_p(t)$ השדה של פונקציות רציונליות מעל השדה הסופי $\mathbb{F}_p$. כלומר, האיברים של K הם מנות $\frac{P(t)}{Q(t)}$, כאשר $P(t),Q(t)\in\mathbb{F}_p[t]$ פולינומים, $Q(t)$ לא הפולינום האפסי. לכל פולינום מתוקן אי־פריק $g(t)\in\mathbb{F}_p[t]$ ניתן להגדיר הערכה $|\cdot|_g$ על K על ידי $|\frac{P(t)}{Q(t)}|_g=p^{b-a}$, כאשר

$$\begin{aligned} P(t) &= g(t)^aP'(t)\\ Q(t) &= g(t)^bQ'(t),\end{aligned}$$

והפולינומים $P',Q'\in\mathbb{F}_p[t]$ זרים ל־g.

   (א) בדוק כי $|\cdot|_g$ אכן הערכה לא־ארכימדית.

   (ב) תהי $|\cdot|$ הערכה על K. הוכח שהצמצום שלה ל־ $\mathbb{F}_p$ הוא ההערכה הטריוויאלית

$$|x|=\begin{cases}1 & : x\in\mathbb{F}_p^*\\ 0 & : x=0\end{cases}.$$

   (ג) הוכח שאם ההערכה $|\cdot|$ לא־טריוויאלית וחסומה בחוג $\mathbb{F}_p[t]$, אזי היא שקולה ל־$|\cdot|_g$ עבור g אי־פריק מתוקן יחיד.

   (ד) הוכח שאם $|\cdot|$ לא חסומה בחוג $\mathbb{F}_p[t]$, אזי היא שקולה להערכה הלא־ארכימדית $|\frac{P(t)}{Q(t)}|_\infty=p^{\deg Q-\deg P}$.

6. תהי $|\cdot|$ הערכה על השדה K.

(א) הוכח שהיא לא־ארכימדית אם ורק אם הקבוצה $\{|n| : n\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{R}$ חסומה.

(ב) הוכח שאם $|\cdot|$ ארכימדית, אזי $|n|\geq 1$ לכל $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. רמז: נניח שלא, ורשום מספרים שלמים בבסיס n.

7. תהי $|\cdot|$ הערכה לא־ארכימדית ויהיו $x,y\in K$. הוכח שאם $|x|\neq|y|$, אזי $|x+y|=\max\{|x|,|y|\}$.

8. הוכח שההערכות $|\cdot|_p$ עבור p שונים, וההערכה $|\cdot|_\infty$ כולן לא שקולות זו לזו.

9. נכליל את השאלה הקודמת. יהי K שדה מספרים. לכל אידאל ראשוני לא־אפסי $\mathfrak{p}\triangleleft\mathcal{O}_K$ הגדרנו הערכה $|\cdot|_\mathfrak{p}$ על K. לכל שיכון $\tau: K\hookrightarrow\mathbb{C}$ מקבלים הערכה ארכימדית $|x|_\tau=|\tau(x)|$ לכל $x\in K$, כאשר ההערכה באגף ימין הינה ההערכה הרגילה על $\mathbb{C}$. הוכח שההערכות $|\cdot|_\tau$, $|\cdot|_\mathfrak{p}$, עבור τ שונות עד כדי הצמדה, כולן לא שקולות זו לזו.

10. יהי K שדה שלם תחת הערכה לא־ארכימדית. הוכח שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס, כלומר שהסדרה של סכומים חלקיים מתכנסת, אם ורק אם $|a_n|\to 0$.

כידוע מאינפי 1, זה נכון רק בכיוון אחד עבור הערכות ארכימדיות!