תרגול כיתה 10 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

אי שוויונים הסתברותיים, אמידה נקודתית, רווח סמך ובדיקת השערות

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

אי שוויונים הסתברותיים

אי שוויון מרקוב

אם X הוא מ"מ המקבל ערכים אי שלילים בלבד, אז לכל ערך חיובי a מתקיים

$$P\left(X \ge a\right) \le \frac{E\left(X\right)}{a}$$

אי שוויון צ'בישב

אם X מ"מ שתוחלתו μ ושונותו σ^2 הן סופיות, אז לכל ערך חיובי k מתקיים

$$P\left(|X-\mu| \ge k\right) \le \frac{\sigma^2}{k^2}$$

שאלה 1

בבניין יש 80 מדרגות עד לגג. אדם מטיל קובייה הוגנת 20 פעמים, כאשר אחרי הטלה הוא עולה מספר המדרגות השווה לזה שמראה הקובייה. תן חסם מלעיל לסיכוי שיגיע לגג, בעזרת אי-שוויון צ'בישב, מרקוב, וקירוב להתפלגות הנורמלית.

הסקה סטטיסטית – אמידה נקודתית

מונחים:

- אוכלוסייה – קבוצה/אוסף פריטים שמעוניינים במידע מסוים עליהם.
- מדגם – קבוצה חלקית של פריטים מהאוכלוסייה.
- פרמטר – מספר קבוע המאפיין את האוכלוסייה (θ).
- סטטיסטי – פונקציה של המדגם שאינה תלויה בפרמטר.
- אומד/אמד – סטטיסטי המשמש לאמידת פרמטר באוכלוסייה $(\hat{\theta})$.
- אומדן – הערך המספרי של האמד.

קריטריונים לטיב אומדים

אומד חסר הטיה: אמד $\hat{\theta}$ ייקרא אח"ה לפרמטר θ, אם מתקיים $E(\hat{\theta})=\theta$.

הטייה של אומד: $Bias(\hat{\theta})=E(\hat{\theta})-\theta$.

שגיאה ריבועית ממוצעת (MSE): $MSE(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2=Var(\hat{\theta})+[Bias(\hat{\theta})]^2$.

השוואת יעילות של אומדים: אם T_1,T_2 הם שני אח"ה לפרמטר θ, אזי האומד T_1 עדיף

אם מתקיים $V_\theta\left(T_1\right) \le V_\theta\left(T_2\right)$, לכל ערך של θ. במקרה הכללי נשווה $MSE\left(T_1\right) \le MSE\left(T_2\right)$.

<u>שאלה 2</u>

נתונה אוכלוסייה בעלת התפלגות בינומית עם פרמטרים $n=1$ ו-p לא ידוע.
מוצעים שלושה אומדים לפרמטר p על סמך מדגם בין 2 תצפיות בלתי תלויות x_1, x_2.

$$T_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad T_2 = \frac{x_1 + 2x_2}{3}, \quad T_3 = \frac{2x_1 + 2x_2}{3}$$

קבע ע"י חישוב מתאים מי מהאומדים עדיף.

<u>אמד נראות מירבית (MLE)</u>

השיטה לבניית אמד נראות מירבית (אנ"מ) לפרמטר θ המבוסס על מדגם מקרי בגודל n,
(בד"כ, מ"מ ב"ת) דהיינו $X_1, X_2, \ldots X_n$ מתוך האוכלוסייה הנתונה.

1. בונים את פונקצית הנראות $L(\theta)$ של המדגם הנתונה על ידי:

$$L(\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(x_i;\theta) & \text{בדידה} \\ \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i;\theta) & \text{רציפה} \end{cases}$$

2. מוצאים ביטוי עבור $l(\theta) = \ln L(\theta)$.

3. חיפוש מקסימום לפונקציה $l(\theta)$, על-ידי:
   - גזירת $l(\theta)$ לפי θ.
   - השוואה לאפס, וחילוץ ביטוי עבור θ.

4. הביטוי המתקבל עבור θ, הוא אמד הנראות מירבית ל- θ, ומסומן על-ידי: $\hat{\theta}$.

<u>שאלה 3</u>

נלקח מדגם מקרי בגודל n $(x_1, \cdots, x_n)$ מאוכלוסייה שמתפלגת מעריכית $Exp(\lambda)$,
כשהפרמטר λ לא ידוע. מצא אומד ל-λ בשיטת הנראות המירבית.

<u>שאלה 4</u>

במטבע הוגן מסומנים הצדדים ב-{H,T}. מטילים את המטבע עד שמקבלים H לראשונה. התברר שנדרשו 7 הטלות לשם כך. נסמן ב-θ את ההסתברות לקבל בהטלה כלשהי H,
דהיינו: $P(H) = \theta$. מצא אמד נראות מירבית לפרמטר θ.

<u>רווח סמך</u>

<u>רווח סמך</u>

רו"ס נותן אמידה מרווחית (באינטרוול) של פרמטר באוכלוסייה, ע"י שימוש בתוצאות מדגם. רווח הסמך נבנה באופן כזה שההסתברות שהפרמטר יהיה בתוך הקטע נקבעת מראש, היא נקראת "רמת סמך" $1-\alpha$.

<u>רווח סמך עבור *תוחלת* האוכלוסיה, כאשר *שונותה ידועה*</u>

רו"ס ברמת סמך $1-\alpha$ עבור μ: $\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

<u>רווח סמך עבור *תוחלת* האוכלוסיה, כאשר *שונותה איננה ידועה*</u>

נסמן את סטיית התקן המדגמית: $S=\sqrt{\dfrac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}}=\sqrt{\dfrac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}}$

רו"ס ברמת סמך $1-\alpha$ עבור μ: $\bar{X} \pm t_{\left(n-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

<u>רווח סמך לפרופורציה באוכלוסיה</u>

p – פרופורציית התכונה באוכלוסיה. $\hat{p}=x/n$ – פרופורציה מדגמית.

רו"ס ברמת סמך $1-\alpha$ עבור p: $\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}$

<u>רווח סמך לשונות האוכלוסיה</u>

האומד לשונות האוכלוסייה- S^2

רווח סמך ברמת סמך $1-\alpha$ עבור שונות האוכלוסייה σ^2:

$$\boxed{\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{(n-1);1-\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{(n-1);\alpha/2}}}$$

<u>הערה 1</u>: מבחינה טכנית נוח להשתמש בנוסחה $(n-1)\cdot S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2$

<u>הערה 2</u>: אם נתונה תוחלת האוכלוסייה, המבחן נשאר כנ"ל, עם 2 השינויים הבאים:
(1) להשתמש ב- μ במקום ב- $\bar{X}$; (2) דרגות החופש משתנות ל- n במקום $(n-1)$.

רווח סמך ובדיקת השערות *להפרש תוחלות* של שתי אוכלוסיות *תלויות* (*מדגמים מזווגים*)
תהיינה התצפיות במדגם הראשון $\left(X_1,...,X_n\right)$, ובמדגם השני $\left(Y_1,...Y_n\right)$.
נגדיר את סדרת ההפרשים: $d_i = X_i - Y_i \quad (i=1,...,n)$. בעזרת סדרת ההפרשים הבעיה הופכת להסקה/בניית רו"ס על אוכלוסייה אחת, עם שונות לא ידועה, כאשר ההסקה היא לגבי הפרש התוחלות באוכלוסיות $\mu_d = \mu_X - \mu_Y$.

השונות המדגמית ("המתוקנת") של סדרת ההפרשים היא- $S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)}{n-1}$

ממוצע סדרת ההפרשים- $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$

רווח סמך ברמת סמך (=רמת בטחון) $1-\alpha$ עבור $\left(\mu_1-\mu_2\right)$ נתון ע"י:

$$\bar{d} - t_{(n-1);1-\alpha/2}\cdot\frac{\hat{S}_d^2}{\sqrt{n}} \le \left(\mu_1-\mu_2\right) \le \bar{d} + t_{(n-1);1-\alpha/2}\cdot\frac{\hat{S}_d^2}{\sqrt{n}}$$

או בכתיב אחר: $\boxed{\mu_d \in \bar{d} \pm t_{(n-1);1-\alpha/2}\cdot\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$

סטטיסטי המבחן: $t_{\bar{d}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{S_d\big/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$

המבחן הדו-צדדי לבדיקת השערות: $\boxed{\mu_d \pm t_{(n-1);1-\alpha/2}\cdot\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$

שאלה 5

מכונה מייצרת ברגים שאורכם מתפלג נורמלית עם תוחלת 4 ס"מ וסטיית תקן 0.2 ס"מ.
עקב תקלה במכונה הועלה חשד כי המכונה אינה מייצרת ברגים באורך הנדרש.
לשם בדיקה נלקח מדגם מקרי של 25 ברגים אשר יוצרו במכונה לאחר גילוי התקלה ונמצא כי האורך הממוצע שלהם הוא 3.9 ס"מ . נניח כי השונות נותרה ללא שינוי.

א. מהו רווח סמך (רו"ס) לתוחלת אורך הברגים לאחר התקלה ברמת מובהקות (ר"מ) 2% ?
ב. בונים רווח סמך לתוחלת ברמת בטחון של 95%, ע"י לקיחת מדגם של מספר מסויים של ברגים. כמה ברגים לפחות צריך לקחת על מנת שאורכו של רווח הסמך יהיה לכל היותר 0.1 ס"מ ?
ג. בנו רו"ס בגודל 0.118 ס"מ בעזרת מדגם בגודל 49 ברגים. מה רמת המובהקות α?

שאלה 6

חוקר מציע סוג של דשן שעשוי להגדיל את משקלם של אפרסקים. נלקח מדגם מקרי של 9 אפרסקים והתקבלו התוצאות הבאות (בגרמים): $\sum x = 500,\ \sum x^2 = 28166$

א. אמוד ברו"ס את משקל האפרסקים ברמת סמך של 90% על סמך תוצאות המדגם הנ"ל.
ב. לאחר האמידה התברר שחלה תקלה שיטתית במדידות ויש להוסיף 8 גרם לכל ערך שנמדד. הסבר בקצרה, האם וכיצד ישפיע תיקון הטעות על גודל ומיקום רווח הסמך.

שאלה 7

חוקר מעוניין לאמוד את אחוז האלרגיים באוכלוסייה לפריחת עצי אורן. נלקח מדגם מקרי של 80 אנשים ונמצא כי 20 מהם סובלים מאלרגיה.

א. מהו רווח הסמך לאחוז האלרגיים באוכלוסייה כולה ברמת בטחון של 99%?

ב. מהו גודל המדגם שעל החוקר לדגום ע"מ להבטיח ברמת ביטחון של 90% לפחות שתוצאת המדגם לא תסטה מהתוצאה האמתית באוכלוסייה ביותר מ 5%?

ג. אם רוצים לשמור על גודל רווח הסמך, כיצד ישתנה גודל המדגם אם נגדיל את רמת הביטחון ל 99.9%? (הסבירו ללא חישוב גודל המדגם מחדש).

שאלה 8

במפעל "חרוצי התעשיה" ביקשו לבדוק את ההשערה שתפוקת העובדים הממוצעת גדולה יותר בשעות הבוקר מאשר בשעות אחה"צ. לשם כך נלקח מדגם מקרי אשר כלל 5 מעובדי המפעל והתקבלו התוצאות הבאות:

מס' עובד	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
תפוקה בבוקר	5.5	5.8	6	5.3	5.1
תפוקה אחה"צ	4.5	6.3	5	4.8	4.1

בנו רו"ס להפרש תפוקת העובדים הממוצעת בין הבוקר ואחה"צ, ברמת סמך של 95%.

שאלה 9

נלקח מדגם מקרי של 5 אנשים שניגשו למבחן IQ וקיבלו את הציונים הבאים:
96, 98, 102, 104, 105. מצא רווח סמך לשונות הציונים ברמת ביטחון של 99%.