תרגיל 9 בפונקציות מרוכבות

1. נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), r(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של z_0. בנוסף נתון כי ב z_0 יש ל f קוטב מסדר 2 ל g יש אפס מסדר 3, ל $r(z)$ אפס מסדר 2 ול $h(z)$ אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות ב z_0 של:

   (א) $\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$

   (ב) $\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$

2. תהי z_0 נקודת סינגולריות עיקרית של $f(z)$. תהי $g(z)$ פונקציה שלמה ולא קבועה. הוכיחו כי z_0 היא גם סינגולריות עיקרית של ההרכבה $g \circ f$.

3. תהי z_0 סינגולריות עיקרית של $f(z)$. הוכיחו כי לכל N טבעי ולכל M ממשי קיימת סדרה $z_n \to z_0$ כך ש

$$|(z_n - z_0)^N f(z_n)| \geq M$$

   לכל $n \in \mathbb{N}$.

4. פתחו את הפונקציה

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$$

   לטור לורן בטבעת הנתונה:

   (א) הטבעת $|z-2| > 2$

   (ב) הטבעת $0 < |z-2| < 2$

5. מצאו את החלק העיקרי (דהיינו החלק עם חזקות שליליות) של טור לורן של הפונקציה

$$\frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2}$$

   סביב הנקודה $z_0 = 3i$.

6. הראו כי אם ל f קוטב ב z_0 ולg יש סינגולריות עיקרית ב z_0 אז ל $f+g$ יש סינגולריות עיקרית ב z_0.

7. נניח כי ל f סינגולריות מבודדת ב z_0. הוכיחו כי $Res(f', z_0) = 0$.

8. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות מכוונות נגד כיוון השעון):

   (א) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} \mathrm{d}z$

   (ב) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6} \mathrm{d}z$

(ג) $\int\limits_{\gamma} \frac{1+z}{\sin z}\mathrm{d}z$ כאשר γ הוא הריבוע שקודקודיו $4+4i, 4-4i, -4+4i, -4-4i$

(ד) $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2(e^z-1)}\mathrm{d}z$