מבנים דיסקרטיים – תרגיל 4

כל סעיף שווה 10 נקודות.

שאלה 1

בכל סעיף נתונות שתי חבורות G,H ופונקציה $f: G \to H$. עליכם לקבוע אם f הומומופיזם \ איזומורפיזם \ אף אחד מהם. (אין צורך להוכיח כי G,H חבורות).

א. $G = (\mathbb{C}^*,\cdot),\ \ H = (\mathbb{R}^*,\cdot)$ (תזכורת: $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ו-$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ו-$f: G \to H$ מוגדרת ע"י $f(z) = |z|$.

ב. $G = (\mathbb{R},+),\ \ H = (\mathbb{Z},+)$ ו-$f: G \to H$ מוגדרת ע"י $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (כאשר $\lfloor x \rfloor$ אומר עיגול כלפי מטה של x).

ג. $G = H = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\right\}$ (הכפל ב-G וב-H הוא כפל מטריצות) ו-$f: G \to H$ מוגדרת ע"י $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

שאלה 2

תהי G חבורה.

א. יהי $x \in G$. הוכיחו כי הפונקציה $f: G \to G$ המוגדרת ע"י $f(g) = x^{-1}gx$ היא איזומורפיזם.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f: G \to G$ המוגדרת ע"י $f(g) = g^{-1}$ היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

שאלה 3

תהיינה G,H חבורות ויהי $f: G \to H$ <u>הומומורפיזם</u>.

א. הראו כי לכל $g \in G$ ו-$n \in \mathbb{Z}$ מתקיים $f(g^n) = f(g)^n$.

ב. נניח ש-f <u>איזומורפיזם</u>. הראו כי לכל $g \in G$ מתקיים $o(g) = o(f(g))$.

ג. תנו דוגמא ל-G,H,f כך ש-$o(g) \neq o(f(g))$. (כמובן שלפי סעיף ב לא ייתכן ש-f איזומורפיזם).

שאלה 4

תהיינה G,H חבורות ויהי $f: G \to H$ איזומורפיזם.

א. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם H אבלית.

ב. הוכיחו כי ב-G קיים איבר מסדר n אם ורק אם ב-H קיים איבר מסדר n. [ניתן להיעזר בשאלה 3.]