בוחן אלגברה לינארית למהנדסים תשעז

26/12/2015 (כ"ו כסליו)

מתרגלים: אחיה בר־און, אריאל ויצמן, ביאנה פרידמן ואיתמר שטיין.

- ענו על כל השאלות.
- **נמקו היטב תשובותיכם!**
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא. על מחברת בחינה ממדור בחינות מספיק למלא רק בעמוד הראשון.**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

Q1	
Q2	
Q3	
total	

בהצלחה!

1. [34 נק'.] נתונה מערכת המשוואות הבאה מעל $\mathbb{R}$ עם הפרמטר k:

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3+x_4 & =1 \\ x_1+kx_2+x_3+x_4 & =k \\ x_1+x_2+kx_3+x_4 & =k+1 \end{cases}$$

קבעו לאילו ערכי k מתקיים כי למערכת:

(א) פתרון יחיד.

(ב) אין סוף פתרונות.

(ג) אין פתרון.

פתרון: נדרג את המטריצה המייצגת את המערכת הזאת

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & 1 & k+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & k & 1 & k+1 \\ 1 & k & 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & k & 1 & k+1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 & -1 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k & -k^2-k+1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & k & 1 & k+1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 1-k & -k^2-k \end{array}\right)$$

כעת אם $k-1, -k^2-k+2 \neq 0$ אזי אין שורת סתירה ויש משתנה חופשי ולכן יהיו ∞ פתרונות.
אם $k-1=0$ אזי $k=1$ ונקבל

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

כלומר יש שורת סתירה ולכן אין פתרון.
אם $-k^2-k+2=0$ אזי $(k+2)(k-1) = k^2+k-2 = 0$ את המקרה ש $k=1$ בדקנו. נבדוק את המקרה האחרון בו $k=-2$ ונקבל

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

אין שורת סתירה ויש משתנה חופשי ולכן יש ∞ פתרונות.

2. (א) כדי להראות שקבוצה מסוימת **אינה** תת מרחב וקטורי. צריך להראות שהיא אינה מקיימת את אחת התכונות של תת מרחב וקטורי.

i. [10 נק'] נתון המרחב הוקטורי $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל השדה $\mathbb{R}$ עם פעולת חיבור מטריצות רגיל וכפל בסקלר. נסמן ב U את הקבוצה של כל המטריצות ההפיכות ומטריצת ה 0. כלומר:

$$U=\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2} \mid A \text{ invertible}\} \cup \{0\}$$

הקבוצה U **אינה** תת מרחב וקטורי של V. הראו זאת.

פתרון: הוכחה: $I, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ הפיכות כי A היא מצטריצה אלמנטרית אבל $I-A$ אינה הפיכה כי יש לה שורת אפסים.

ii. [10 נק'] נתון המרחב הוקטורי $V = \mathbb{C}^2$ מעל השדה $\mathbb{C}$ עם פעולות החיבור והכפל בסקלר הרגילות. הקבוצה

$$W = \{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mid \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)\}$$

אינה תת מרחב וקטורי של V. הראו זאת.

פתרון: ניקח $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ $v =$ כי $z_1 = i, z_2 = 1$ מקיים $\mathrm{Re}(z_1) = 0 = \mathrm{Im}(z_2)$ אבל כשנכפיל ב $\alpha = i$ נקבל כי

$$\alpha v = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} \notin W$$

כי

$$\mathrm{Re}(z_1) = -1 \neq 1 = \mathrm{Im}(z_2)$$

(ב) [13 נק'] נתון המרחב הוקטורי $\mathbb{R}_3[x]$. האם הקבוצה הבאה היא בלתי תלויה לינארית?

$$B = \{1 + x^2 + 2x^3, 5 + x + 6x^2 + 13x^3, -3 - x - 3x^2 - 8x^3\}$$

פתרון: כפי שראינו בתרגול, שמים את הוקטורים בעמודות מטריצה, ובודקים האם הפיתרון היחיד הוא הטריוויאלי. נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 13 & -8 \end{pmatrix}$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 13 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הוקטורים תלויים ליניארית אם ורק אם למטריצה המדורגת יש פיתרון לא טריוויאלי. כאן מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן הוקטורים בת"ל.

הערה: שימו לב שלמערכת יש פיתרון לא טריוויאלי אם ורק אם יש משתנה חופשי. כאן אין משתנה חופשי, ולכן הוקטורים בת"ל.

3. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. בכל הסעיפים A הינה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(א) [11 נק'] אם למערכת המשוואות $A^2x = b$ יש לפחות פתרון אחד אז גם למערכת המשוואות $Ax = b$ יש לפחות פתרון אחד.

פתרון: נכון. נניח x_0 פתרון ל $A^2x = b$ כלומר $A^2x_0 = b$ אזי Ax_0 פתרון ל $Ax = b$. הוכחה

$$A(Ax_0) = A^2x_0 \overset{(1)}{=} b$$

כאשר (1) מסתמך על ההנחה.

(ב) [11 נק'] אם למערכת המשוואות $Ax = b$ יש לפחות פתרון אחד אז גם למערכת המשוואות $A^2x = b$ יש לפחות פתרון אחד.

פתרון: לא נכון. עבור $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ יש פתרון למערכת $Ax = b$ (למשל $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא פתרון) אבל $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן אין פתרון ל $A^2x = b$ כי יש שורת סתירה.

(ג) [11 נק'] אם למערכת המשוואות $A^{15}x = 0$ יש פתרון x **שונה מ** 0 אז גם למערכת המשוואות $Ax = 0$ יש פתרון שונה מאפס.

פתרון: נכון. נדרג את A^{15} לצורה קנונית. אם הגענו ל I אזי A^{15} הפיכה ויש רק את הפתרון הטריאלי למערכת $A^{15}x = 0$. אבל נתון שקיים פתרון לא טריואלי למערכת ולכן A^{15} אינה הפיכה.

מסקנה: A אינה הפיכה. הוכחה: אחרת A הפיכה ולכן גם A^{15} (כי מכפלה של הפיכות היא הפיכה).

ולכן הצורה הקנונית של A שונה מ I ולכן בדירוג המערכת $(A|b)$ נקבל שיש משתנים חופשים. מה שאומר שיש פתרון לא טריאלי למערכת $Ax = 0$.