תרגול 9

תזכורת: יהי (X,d) מרחב טופולוגי. לכל ϵ שניקח, d שקול לטופולוגיה הבאה:

$$d'(x,y)=\min\{\epsilon,d(x,y)\}$$

כלומר, d שקול למטריקה שחסומה ע"י ϵ.

תרגיל: יהיו $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מרחבים טופולוגיים מטריזביליים. אזי $\prod_{\mathbb{N}} X_n$ (עם טופולוגיית המכפלה) מטריזבילי.

הוכחה: על כל X_n מוגדרת מטריקה d_n. ניתן להניח ש d_n חסומה ע"י $\frac{1}{2^n}$ (כי אפשר להחליף את d עם מטריקה ששקולה לה וחסומה ע"י $\frac{1}{2^n}$. מטריקות שקולות משרות את אותה טופולוגיה).

נגדיר צטריקה על המכפלה באופן הבא:

$$d(x,y)=\sum_n d_n(x_n,y_n)$$

נשים לב שזה מוגדר, כלומר הסכום יוצא סופי, כי

$$d(x,y)=\sum_n d_n(x_n,y_n)\leq\sum_n\frac{1}{2^n}=1$$

כעת נרצה להוכיח שהטופולוגיה שמושרית מd שווה לטופולוגיית המכפלה.

נסמן ב τ_d את הטופולוגיה שמושרית מ d, ואת טופולוגית המכפלה ע"י τ_π. ונראה בהכלה דו-כיוונית כי הן שוות.

$\tau_\pi\subseteq\tau_d$: תהי $O\in\tau_\pi$ קבוצה פתוחה בסיסית. אזי O מהצורה:

$$O=\prod_{i=1}^{n}O_i\prod_{i=n+1}^{\infty}X_i=O_1\times\cdots\times O_n\times X_{n+1}\times X_{n+2}\times\cdots$$

כעת ניקח $x\in O$ ונראה כי קיים כדור $x\in B(x,r)\subseteq O$. נסמן $x=(x_1,x_2,\dots)$ ומכיוון ש $x_i\in O_i$ (לכל $1\leq i\leq n$) נקבל כי קיימים כדורים $x_i\in B(x_i,r_i)\subseteq O_i$ (כאשר $B(x_i,r_i)$ כדור לפי המטריקה המתאימה d_i). נגדיר $r=\min\{r_1,\dots,r_n\}$ ונקבל

$$x\in B(x,r)=\left\{(y_i)\mid\sum_i d_i(x_i,y_i)<r\right\}\subseteq\{(y_i)\mid\forall i\ \ d_i(x_i,y_i)<r\}\subseteq O$$

$\tau_d \subseteq \tau_\pi$: מ"ל כי לכל כדור $B(x,r)$ קיימת קבוצה פתוחה בסיסית $O \in \tau_\pi$ כך ש $x \in O \subseteq$ $B(x,r)$ (ואז בהניתן קבוצה פתוחה ב τ_d נקבל שלכל נקודה בה יש קבוצה בסיסית ב τ_π שמוכלת בה והנקודה שייכת אליה).

מכיוון שהמטריקה חסומה ע"י 1, אם $r \geq 1$ אפשר לקחת את כל המרחב, וסיימנו. לכן נניח ש$r < 1$.

מכיוון ש$\sum_n \frac{1}{2^n} = 1$, קיים m כך ש $\frac{r}{2} < \sum_{n>m} \frac{1}{2^n}$.

נסמן $x = (x_i)$. נסתכל על הקבוצה:

$$O = B(x_1, \frac{r}{2m}) \times \cdots \times B(x_m, \frac{r}{2m}) \times X_{m+1} \times X_{m+2} \times \cdots$$

זאת קבוצה פתוחה בסיסית לפי טופולוגית המכפלה, והיא מכילה את x. כעת נראה כי היא מוכלת ב$B(x,r)$.

יהי $y = (y_i) \in O$.

$$d(y,x) = \sum d_i(y_i, x_i) = \sum_{i \leq m} d_i(y_i, x_i) + \sum_{i>m} d_i(y_i, x_i) < m \cdot \frac{r}{2m} + \frac{r}{2} = r$$

תרגיל: הוכיחו שמכפלה לא בת מניה של מרחבים טופולוגיים מטריזביליים, בעלי יותר מאיבר אחד, אינה מטריזבילית.

הוכחה: ניזכר כי תת מרחב של מרחב מטריזבילי הוא מרחב מטריזבילי (אם נצמצם את המטריקה על תת המרחב נקבל את טופולוגיית תת המרחב).

לכל מרחב מטרי בין יותר מאיבר אחד יש תת מרחב דיסקרטי בין שני איברים (נבחר שני איברים שונים. המרחק בינהם גדול מ0).

לכן מספיק להוכיח שמכפלה לא בת מניה של מרחבים דיסקרטיים בין שני איברים (כלומר $\prod_{i \in I}\{0,1\}$, כאשר I לא בן מניה) אינה מטריזבילית.

ובכן, אנחנו יודעים (הוכחנו בעבר) שבמרחב מטרי כל קבוצה סגורה היא חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות.

נניח בשלילה ש$\Pi_{i \in I}\{0,1\}$ מטריזיבלי. הנקודון $\{(0,0,0,0,....)\} = \{(0)\}$ סגור (במרחב מטרי כל נקודון סגור). לכן קיימות קבוצות פתוחות O_n כך ש $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = \{(0)\}$. מכיוון שכל קבוצה פתוחה היא איחוד של קבוצות פתוחות בסיסיות, ניתן להניח שהקבוצות O_n הן פתוחות בסיסיות (כי אפשר להחליף כל אחת מהן בקבוצה פתוחה בסיסית שמוכלת בו ומכילה את $\{(0)\}$).

קבוצה פתוחה בסיסית סביב 0 נראית כך:

$$O_n = \Pi_{i \in J_n}\{0\} \prod_{i \in I \setminus J_n} \{0,1\}$$

כאשר $J_n \subseteq I$ סופית. במילים: O_n שווה ל $\{0\}$ במספר סופי של מקומות ובשאר המקומות שווה ל $\{0,1\}$.

נשים לב $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ בוא בן מניה, כאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה (סופיות). מכיוון שI לא בן מניה, יש $i \in I$ כך ש$i \notin \bigcup J_n$ (למעשה יש מספר לא בן מניה של אינדקסים כאלו). לכן בכל O_n ברכיב הi מופיעה הקבוצה $\{0,1\}$. ומכאן נקבל שהוקטור y שמקיים

$$\begin{cases} y_i = 1 \\ y_t = 0 \quad t \neq i \end{cases}$$

שייך ל$\bigcap O_n$. סתירה.