תרגיל 1

1. הגדרה: נגיד שחוג R הוא חוג עם חילוק אם כל איבר שונה מ0 הפיך. נגיד שחוג R הוא תחום אם אין בו מחלקי 0.

   (א) הוכיחו שכל תחום סופי (כלומר, שמס' האיברים בו סופי) הוא חוג עם חילוק.

   (ב) יהי R חוג עם חילוק, ו$S \subseteq R$ תת חוג. הוכיחו שS תחום.

   (ג) תנו דוגמא לחוג עם חילוק R ו$S \subseteq R$ תת חוג, כך שS אינו חוג עם חילוק.

   פתרון:

   i. יהי R סופי ויהי $x \in R$. נסתכל על אוסף החזקות הטבעיות של x: $\{x^n | n \in \mathbb{N}\}$. מכיוון ש$R$ סופי, יש $n < m$ כך ש$x^n = x^m$. מתכונות הצמצום של תחום נקבל $x^{n-m} = 1$. לכן x הפיך, וההופכי שלו הוא x^{n-m-1}.

   ii. נוכיח שאין מחלקי 0 שונים מ0 בS. יהי $x \in S$ $x \neq 0$. יהי $y \in S$ כלשהוץ נניח ש$xy = 0$. בפרט, זה קורה גם בR. יהי z ההופכי של x בR. $zxy = 0 \implies y = 0$.

   iii. נקח $R = \mathbb{Q}, S = \mathbb{Z}$.

2. נגד שחוג R הוא בוליאני אם לכל $x \in R$ מתקיים: $x^2 = x$.

   (א) תנו דוגמא לחוג בוליאני.

   (ב) הוכיחו שבכל חוג בוליאני מתקיים: $1 + 1 = 0$.

   (ג) הוכיחו שכל חוג בוליאני הוא קומוטטיבי.

   פתרון:

   i. $(P(X), \triangle, \cap, \emptyset, X)$

   ii. $(1+1) = (1+1)^2 = 1+1+1+1 \implies 1+1=0$.

   iii. יהי R חוג בוליאנית ויהיו $x, y \in R$. $x+y = (x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + yx + xy + y^2 = x + xy + yx + y$

   לכן $yx + xy = 0$

   אבל גם $xy + xy = 0$. הסבר: $xy + xy = (1+1)xy = 0 \cdot xy = 0$.

   הנגדי הוא יחיד, ולכן $xy = yx$.

3. יהי $R = (P(X), \triangle, \cap, \emptyset, X)$ החוג מהתרגול. תנו דוגמא לתת חוג בלי יחידה $S \subseteq R$, שאין בו את היחידה של R. האם יש לו יחידה? האם קיים לR תת חוג (כלומר, עם היחידה של R)?

   פתרון:

   יהי $\emptyset \neq A \subseteq X$. אזי $P(A) \subseteq P(X)$. ברור ש$(P(A), \triangle, \cap, \emptyset)$ הוא תת חוג בלי יחידה. יש לו יחידה משלו- A.

   $\{X, \emptyset\}$ הינו תת חוג של R.

4. יהי R חוג ו$\{S_i|i\in I\}$ משפחה של תת חוגים. הוכיחו ש$\bigcap_{i\in I}S_i$ הוא תת חוג.
פתרון:

נוכיח סגירות לחיבור, כפל ונגדי.

יהיו $x,y\in\bigcap_{i\in I}S_i$.

חיבור: לכל i, $x,y\in S_i$. לכן $x+y\in S_i$, ומכאן ש$x+y\in\bigcap_{i\in I}S_i$.

כפל: לכל i, $x,y\in S_i$. לכן $xy\in S_i$, ומכאן ש$xy\in\bigcap_{i\in I}S_i$.

נגדי: לכל i, $-x\in S_i$, ומכאן ש$-x\in\bigcap_{i\in I}S_i$.

בנוסף, יהי 1 איבר היחידה של R. לכל i $1\in S_i$ ולכן $1\in\bigcap_{i\in I}S_i$.

5. יהי R חוג שבו כל איבר שונה מ0 הפיך מימין. הוכיחו שR הוא חוג עם חילוק.
פתרון:

יהי $0\neq x\in R$. קיים $y\in R$ כך ש$xy=1$. כעת עבור y קיים $z\in R$ כך ש$yz=1$. נוכיח ש$x=z$: $x=x\cdot 1=x(yz)=(xy)z=1\cdot z=z$. לכן y הוא הופכי ימני ושמאלי של x, כלומר, x הפיך.

6. יהי R חוג חילופי, ויהיו $x,y\in R$. הוכיחו שאם xy הפיך, אז גם x וגם y הפיכים. הפריכו זאת במקרה הלא חילופי.
פתרון:

מקרה ראשון: R חוג קומוטטיבי. יהיו $x,y\in R$ כך שxy הפיך. כלומר, קיים $z\in R$ כך ש$1=(xy)z=z(xy)$. אזי: $1=x(yz)$. אבל החוג קומוטטיבי ולכן גם $1=(yz)x$. כלומר, x הפיך וההופכי שלו הוא yz.

כעת נביא דוגמא נגדית לחוג לא קומוטטיבי.

יהי $V=\mathbb{R}^\infty$ ו$R=End(V)$ חוג האנדומורפיזמים של V, כלומר, העתקות לינאריות מV לV, עם חיבור רכיב-רכיב וכפל כהרכבה. אתה מוזמנים לבדוק שזה אכן חוג. איבר ה0 הוא העתקת ה0 (ההעתקה ששולחת הכל ל0) ואיבר היחידה הוא העתקת הזהות.

נסכל על שתי ההעתקות הבאות:

$$T(x_1,x_2,x_3...)=(0,x_1,x_2,x_2,...)$$

$$S(x_1,x_2,x_3,...)=(x_2,x_3,x_4,...)$$

קל לראות שהן אכן העתקות לינאריות. כמו כן, $S\circ T=id$, בפרט הפיך. אבל S וT אינן הפיכות, כי T לא על וS לא חח"ע.

7. קבעו האם הבאים הם תתי חוגים של $\mathbb{Q}$:

(א) $R=\left\{\frac{m}{2n+1}|n,m\in\mathbb{Z}\right\}\subseteq\mathbb{Q}$.

(ב) $R=\left\{\frac{2n+1}{m}|n\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\mathbb{Q}$.

א. איבר יחידה: $1=\frac{1}{1}$

סגירות לכפל: $\frac{m_1}{2n_1+1}\cdot\frac{m_2}{2n_2+1}=\frac{m_1m_2}{2(2n_1n_2+n_1+n_2)+1}$

סגירות לחיסור:

$$\frac{m_1}{2n_1+1}-\frac{m_2}{2n_2+1}=\frac{m_1(2n_2+1)-m_2(2n_1+1)}{2(2n_1n_2+n_1+n_2)+1}$$

ב. לא. נראה שאין סגירות לחיבור. $R \in \frac{1}{3}$. אבל $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ לא יכול להיכתב בצורה של מספר אי זוגי במונה