פתרון תרגיל 12

1.א. נבחר $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ברור שהפונקציה גזירה לכל $x\neq 0$. עבור $x=0$:

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}=0$ ולכן הפונקציה גזירה בכל הממשיים.

נשים לב שהנגזרת לא רציפה ב- $x=0$ כי $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

ב. $\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0)-g(x_0-h)}{2h}=0.5g'(x_0)+$

$\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0)-g(x_0-h)}{2h}$.

לכל $h\to 0$ גם $-h\to 0$, נעבור להגדרת גבול של פונקציה לפי היינה ונבין שיש העתקה חח"ע ועל בין סדרות $h_n\to 0$ ו- $-h_n\to 0$ ולכן $\lim_{h\to 0}f(h)=\lim_{-h\to 0}f(-h)$.

לכן: $=0.5g'(x_0)+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{-2h}=0.5g'(x_0)+0.5g'(x_0)=g'(x_0)$

ג. למשל $g(x)=|x|$: ב $x_0=0$ הנגזרת לא קיימת אבל:

$\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{2h}=0$.

2.א. f רציפה ב $[a,b],[b,c]$ ובפרט רציפה שם. יהי $x\in[a,c]$ אם $x\neq b$ אז ברור שהפונקציה רציפה ב x. עבור $x=b$: הפונקציה רציפה ב- $[a,b]$ ולכן $\lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)$. הפונקציה רציפה ב- $[b,c]$ ולכן $\lim_{x\to b^+}f(x)=f(b)$ ולכן $\lim_{x\to b}f(x)=f(b)$. סה"כ הפונקציה רציפה ב- $[a,c]$.

לפי משפט קנטור נקבל שהפונקציה רציפה במידה שווה בכל $[a,c]$.

ב. נניח בשלילה שלא קיים $\delta>0$ כך שאם $|x-y|<\delta$ אז $\sup\{|f(x)-f(y)|\}<\varepsilon\in\mathbb{R}$.

כלומר יהי $\varepsilon>0$ לכל $\delta>0$ תמיד יהיו x,y כך ש- $|x-y|<\delta$ וגם $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$ סתירה להגדרת רציפות במ"ש.

ג. $\Leftarrow$: f רציפה במ"ש בקטע $\Longleftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שאם $|x - y| < \delta$ אז $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

יהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $\delta > 0$ כך ש $|f(x) - f(y)| < 0.5\varepsilon$ לכל $|x - y| < \delta$ ובפרט $\sup\{|f(x) - f(y)|\} \leq 0.5\varepsilon < \varepsilon$ $\Leftarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta_1 > 0$ כך שאם $|\delta - 0| = \delta < \delta_1$ אז:

$|\sup\{|f(x) - f(y)|: |x - y| < \delta\} - 0| = \sup\{|f(x) - f(y)|: |x - y| < \delta\} < \varepsilon$

$\Rightarrow$: נסמן $g(\delta) \coloneqq \sup\{|f(x) - f(y)|: |x - y| < \delta\}$ ומתקיים $\lim_{\delta\to 0} g(\delta) = 0$ כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta_1 > 0$ כך שאם $|\delta - 0| = \delta < \delta_1$ אזי: $|g(\delta) - 0| = \sup\{|f(x) - f(y)|\} < \varepsilon$ ובפרט לכל $|x - y| < \delta$ מתקיים $|f(x) - f(y)| \leq \sup\{|f(x) - f(y)|\} < \varepsilon$.