הרצאה 8

נכתב על ידי יהונתן רגב

תזכורת (האינטגרל התחתון והעליון של דרבו)

תהי f חסומה בקטע $[a,b]$.

האינטגרל העליון של דרבו:

לכל שתי חלוקות P,Q של הקטע $[a,b]$:

$$\underline{s}(Q) \le \bar{s}(P)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\inf\{\bar{s}(P)\} := \overline{\int_a^b} f(x)dx}$$

האינטגרל התחתון של דרבו:

לכל שתי חלוקות P,Q של הקטע $[a,b]$:

$$\underline{s}(Q) \le \bar{s}(P)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sup\{\underline{s}(P)\} := \underline{\int_a^b} f(x)}$$

הערה

לכל חלוקה P של הקטע $[a,b]$:

$$(b-a)\cdot\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \underline{s}(\{a,b\}) \le \underline{s}(P) \le \bar{s}(P) \le \bar{s}(\{a,b\}) = (b-a)\cdot\sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$(b-a)\cdot\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \underline{\int_a^b} f(x) \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le (b-a)\cdot\sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

■

מוסכמה

עד סוף הנושא:

- f פונקציה חסומה בקטע סגור $[a,b]$.
- P,Q,R חלוקות של הקטע $[a,b]$.

משפט (דרבו)

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \underline{s}(P)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \bar{s}(P)$$

לכן, למשל, ניתן לחשב את האינטגרל העליון ע"י בחירת סדרת חלוקות P_n כך ש - $\lambda(P_n)\to 0$ כרצוננו, ולחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{s}(P)$$

חישוב האינטגרל התחתון באופן דומה.

הוכחה

נוכיח עבור האינטגרל העליון. ההוכחה עבור האינטגרל התחתון באופן דומה.

יהי $0<\varepsilon$.

נקבע חלוקה Q כך ש:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \le \bar{s}(Q) \le \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$$

אם $\lambda(P)$ מספיק קטן, אז: $P\subseteq P\cup Q$.

לכן:

$$\bar{s}(P) \le \bar{s}(P\cup Q) + |(P\cup Q)\backslash P|\cdot\lambda(P)\cdot\omega \le \bar{s}(P\cup Q) + \overbrace{|Q|\cdot\lambda(P)\cdot\omega}^{<\varepsilon}$$

ועבור (P) מספיק קטן:

$$\bar{s}(P) \le \bar{s}(P \cup Q) + \varepsilon \le \bar{s}(Q) + \varepsilon \le \overline{\int_a^b} f(x)dx + 2 \cdot \varepsilon$$

לכן, לכל $\varepsilon > 0$ ולכל חלוקה P עם $\lambda(P)$ מספיק קטן :

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \le \bar{s}(P) \le \overline{\int_a^b} f(x)dx + 2 \cdot \varepsilon$$

לכן, כאשר $\lambda(P)$ מספיק קטן :

$$\left| \bar{s}(P) - \overline{\int_a^b} f(x)dx \right| \le 2 \cdot \varepsilon$$

■

דוגמה

נחשב את :

$$\overline{\int_a^b} xdx \quad , \quad \underline{\int_a^b} xdx$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, תהי P_n החלוקה של הקטע $[a,b]$ ל – n קטעים באורך שווה.

$$\lambda(P_n) = \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

x פונקציה עולה, לכן החסם העליון בקטע הוא הערך בקצה הימני של הקטע.

לכן :

$$P_n : \ a \ , a + 1 \cdot \frac{b-a}{n} \ , \cdots , a + (n-1) \cdot \frac{b-a}{n} \ , b$$

לכן :

$$\bar{s}(P_n) = \frac{b-a}{n} \cdot \left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \cdots + \frac{b-a}{n} \cdot \left(a + n \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

$$\bar{s}(P_n) = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \cdots + \left(a + n \cdot \frac{b-a}{n}\right) \right)$$

$$\bar{s}(P_n)=\frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{n}{2}\cdot\left(a+b+\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

$$\bar{s}(P_n)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}=\overline{\int_a^b}xdx$$

באופן דומה:

$$\underline{\int_a^b}xdx=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$$

משפט

פונקציה f היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ לפי רימן $\Leftrightarrow$ האינטגרל העליון של דרבו והאינטגרל התחתון של דרבו קיימים ושווים.

במקרה זה:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\underline{\int_a^b}f(x)dx=\overline{\int_a^b}f(x)dx}$$

הוכחה

$\boxed{\Rightarrow}$

תהי P_n סדרת חלוקות מנוקדות עם $\lambda(P)\to 0$.

עפ"י משפט דרבו:

$$\underline{\int_a^b}f(x)dx\xleftarrow{n\to\infty}\underline{s}(P_n)\le\sigma(P_n)\le\bar{s}(P_n)\xrightarrow{n\to\infty}\overline{\int_a^b}f(x)dx$$

עפ"י ההנחה:

$$\underline{\int_a^b}f(x)dx=\overline{\int_a^b}f(x)dx$$

לכן, עפ"י משפט הסנדוויץ':

$$\sigma(P_n) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$\boxed{\Leftarrow}$

לכל חלוקה P:

$$\bar{s}(P) = \sup\{\sigma(P)\} \quad , \quad \underline{s}(P) = \inf\{\sigma(P)\}$$

תהי P_n סדרת חלוקות כך ש: $\lambda(P_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

עפ"י הנ"ל, לכל $n \in \mathbb{N}$:

- קיים ניקוד של P_n כך ש:

$$\sigma(P_n) \le \bar{s}(P_n) \le \sigma(P_n) + \frac{1}{n}$$

- קיים ניקוד (אחר) של P_n כך ש:

$$\sigma(P_n) - \frac{1}{n} \le \underline{s}(P) \le \sigma(P_n)$$

עפ"י ההנחה:

$$\int_a^b f(x)dx \xleftarrow{n\to\infty} \sigma(P_n) \le \bar{s}(P_n) \le \sigma(P_n) + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

עפ"י משפט הסנדוויץ':

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} \xleftarrow{n\to\infty} \bar{s}(P_n) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

ועפ"י יחידות הגבול:

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \int_a^b f(x)dx$$

ובאופן דומה עבור האינטגרל התחתון.

■

מסקנה

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$\blacksquare$

מסקנה

1. אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז f חסומה שם ולכל $0<\varepsilon$, קיים $0<\delta$ כך ש:
   א. לכל שתי חלוקות P,Q עם $\lambda(P),\lambda(Q)<\delta$:
   $$\bar{s}(P)-\underline{s}(Q)<\varepsilon$$
   ב. לכל חלוקה P עם $\lambda(P)<\delta$:
   $$\bar{s}(P)-\underline{s}(P)<\varepsilon$$
2. אם f בקטע $[a,b]$, ולכל $0<\varepsilon$, קיימת:
   א. חלוקה P כך ש:
   $$\bar{s}(P)-\underline{s}(P)<\varepsilon$$
   ב. חלוקות P,Q כך ש:
   $$\bar{s}(P)-\underline{s}(Q)<\varepsilon$$
   אז f אינטגרבילית שם.

תרגיל: הוכח!

מסקנה (תנאי רימן לאינטגרביליות)

f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f חסומה בקטע $[a,b]$ ומתקיים:

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\left(\overbrace{\Delta_1\cdot\omega_1+\cdots+\Delta_k\cdot\omega_k}^{=\bar{s}(P)-\underline{s}(P)}\right)=0$$

כאשר, לכל $1\le i\le k$:

$$\omega_i \coloneqq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

ובגבול, מספיק לקחת סדרה P_n <u>אחת</u> עם $\lambda(P_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נוכיח בלשון הסדרות.

תהי P_n סדרת חלוקות כך ש: $\lambda(P_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. אז:

$$\bar{s}(P_n) \underset{\text{דרבו}}{\longrightarrow} \overline{\int_a^b} f(x)dx \underset{\text{משפט}}{=} \int_a^b f(x)dx$$

$$\underline{s}(P_n) \underset{\text{דרבו}}{\longrightarrow} \underline{\int_a^b} f(x)dx \underset{\text{משפט}}{=} \int_a^b f(x)dx$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{s}(P_n) - \underline{s}(P_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\boxed{\Longrightarrow}$

לכל סדרת חלוקות P_n כך ש: $\lambda(P_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, מתקיים:

$$\underline{s}(P_n) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le \bar{s}(P_n)$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \bar{s}(P_n) - \underline{s}(P_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

לכן, f אינטגרבילית.

■