פתרון תרגיל 5 בלינארית-2

שימו לב:
T-שמור משמעו
T-אינווריאנטי

תשובה 1

א. תהי:

$$T(x,y,z) = (x,x-y,0)$$

(i) יהי:

$U_1 = Sp\{(2,1,0)\}$.

לכל $v=(2\alpha,\alpha,0) \in U_1$ מתקיים:

$$Tv = (2\alpha,2\alpha-\alpha,0) = (2\alpha,\alpha,0) = v \in U_1$$

ולכן U_1 T-שמור.

(ii) יהי:

$U_2 = Sp\{(1,0,0)\}$.

מאחר ש-

$$T(1,0,0) = (1,1,0) \notin U_2$$

הרי U_2 אינו T-שמור.

(iii) יהי:

$U_3 = Sp\{(0,0,1)\}$.

לכל $v=(0,0,\alpha) \in U_3$ מתקיים:

$$Tv = (0,0,0) = \theta \in U_3$$

ולכן U_3 T-שמור.

ב. תהי:

$$T(x,y,z,u) = (x+z,0,0,x-z)$$

ונגדיר:

$$W = \{(\alpha,0,0,\beta) \mid \alpha,\beta \in R\}$$
$$= Sp\{(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$$

זהו תת-מרחב של R^4 וממדו 2. נראה כי W הוא T-שמור. אכן, לכל $v=(\alpha,0,0,\beta) \in W$ מתקיים:

$Tv = T(\alpha,0,0,\beta) = (\alpha,0,0,\alpha) \in W$.

דוגמא לתת-מרחב שאינו T-שמור:

$$W_1 = Sp\{(1,1,1,1)\}$$

אכן,

$$T(1,1,1,1) = (2,0,0,0) \notin W_1$$

<u>תשובה 2</u>

א. יהי $W=\mathrm{Sp}\{v_1,\dots,v_k\}$. נתון כי $Tv_i=\lambda v_i$ $(i=1,\dots,k)$. לכן לכל $v=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i v_i \in W$ מתקיים:

$$Tv=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i Tv_i=\lambda\sum_{i=1}^{k}\alpha_i v_i=\lambda v\in W$$

שכן W הוא תת-מרחב סגור ביחס לכפל בסקלר. לכן W הוא T-שמור

ב. כל תת-מרחב W של התת-מרחב העצמי V_λ נפרש על-ידי וקטורים מתוך V_λ, דהיינו נפרש על-ידי וקטורים השייכים לאותו ערך עצמי λ. לכן על-פי חלק א, W הוא T-שמור.

ג. לא תמיד כל תת-מרחב של תת-מרחב T-שמור אף הוא T-שמור. לדוגמא, התת-מרחב:

$$W=\{(x,y,0)\,|\,x,y\in \mathrm{R}\}$$

הוא שמור תחת הטרנספורמציה T שבשאלה 1. התת-מרחב:

$$U_2=\mathrm{Sp}\{(1,0,0)\}$$

הוא חלקי ל-W אך הוא איננו T-שמור כפי שראינו בשאלה 1 א.

ד. יהי $W=\mathrm{Sp}\{v\}$ תת-מרחב T-שמור. אז $Tv\in W$, ולכן Tv היא כפולה של v: $Tv=\lambda v$. הווה אומר - v הוא וקטור עצמי של T.

ה. הטרנספורמציה:

$$T:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-7&8\\-6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

מוגדרת במרחב דו-ממדי R^2. התת-מרחבים ה-T-שמורים הטריוויאליים של R^2 הם $\{\theta\}$ ו-R^2. אם יש תת-מרחב לא טריוויאלי, הרי הממד שלו בהכרח 1, ולכן הוא נפרש על-ידי וקטור עצמי של T. בדיקה ישירה מראה, כי ישנם שני וקטורים עצמיים בלתי-תלויים לינארית:

$$v_1=(1,1)\qquad Tv_1=v_1$$

$$v_2=(4,3)\qquad Tv_2=-v_2$$

ולכן התת-מרחבים ה-T-שמורים הלא טריוויאליים של R^2 הם:

$$W_1=\mathrm{Sp}\{v_1\}\quad,\quad W_2=\mathrm{Sp}\{v_2\}$$

<u>תשובה 3</u>

תהי T טרנספורמציה לינארית במרחב דו-ממדי V, ונניח כי ל-T אין ערכים עצמיים. מכאן נובע (ראה שאלה 2 ד), כי אין תת-מרחבים T-שמורים ממימד 1. לכן התת-מרחבים ה-T-שמורים היחידים הם התת-מרחבים הטריוויאליים $\{\theta\}$ ו-V.

~~ב. על-פי טענה 14.XI $\mathrm{Ker}P(T)$ ו-$\mathrm{Im}P(T)$ הם תת-מרחבים T-שמורים. לכן אם T טרנספורמציה במרחב דו-ממדי V, שאין לה ערכים עצמיים, אז (ראה חלק א) לכל פולינום $P(t)$ התת-מרחבים $\mathrm{Ker}P(T)$ ו-$\mathrm{Im}P(T)$ מתלכדים עם $\{\theta\}$ או עם V.~~

<u>תשובה 4</u>

תהי:

$$T(x,y,z,u) = (x+z,0,0,x-z)$$

ויהי:

$$W = \mathrm{Sp}(\{v_1=(1,0,0,1),v_2=(1,0,0,-1)\})$$

תת-מרחב T-שמור.

א.

$$T_W v_1 = Tv_1 = (1,0,0,1) = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2$$

$$T_W v_2 = Tv_2 = (1,0,0,1) = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2$$

ולכן:

$$[T_W]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ב. יהיו:

$$v_3 = (1,1,1,1) \quad , \quad v_4 = (1,-1,1,1)$$

אז:

$$Tv_1 = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4$$

$$Tv_2 = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4$$

$$Tv_3 = (2,0,0,0) = 1\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4$$

$$Tv_4 = (2,0,0,0) = 1\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4$$

ולכן:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} [T_W]_{B_1} & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

קס"3

תשובה 5

א. תהי:

$$T(x,y,z,u) = \left(\frac{5}{2}x+y-\frac{1}{2}z+u,\ 3y+u,\ \frac{1}{2}x+y+\frac{3}{2}z+u,\ 3u\right)$$

(i)

$$Tv_1 = T(1,0,1,0) = (2,0,2,0) = 2v_1$$

$$Tv_2 = T(1,0,-1,0) = (3,0,-1,0) = v_1 + 2v_2$$

כלומר, Tv_1 ו-Tv_2 שייכים ל-$W_1=\mathrm{Sp}(\{v_1,v_2\})$ ולכן W_1 הוא T-שמור.

(ii)

$$Tv_3 = T(1,1,1,0) = (3,3,3,0) = 3v_3$$

$$Tv_4 = T(1,1,1,1) = (4,4,4,3) = v_3 + 3v_4$$

המשך בדף הבא

כלומר, Tv_3 ו-Tv_4 שייכים ל-$W_2=\mathrm{Sp}(\{v_3,v_4\})$, ולכן W_2 הוא T-שמור.

ב. הבדיקה של העובדה שהוקטורים v_1,v_2,v_3,v_4 מהווים בסיס של R^4 היא שגרתית (די לבדוק שהם בלתי-תלויים לינארית. לשם כך יש לדרג את המטריצה ששורותיה הן הוקטורים הללו ולוודא, שאין אנו מגיעים לשורת אפסים).

מכאן נובע כי:

$$W_1 + W_2 = \mathrm{Sp}(\{v_1,v_2\}) + \mathrm{Sp}(\{v_3,v_4\}) =$$

$$= \mathrm{Sp}(\{v_1,v_2,v_3,v_4\}) = \mathrm{R}^4$$

לכל שתי קבוצות וקטורים K ו-L מתקיימים:
$\mathrm{Sp}K + \mathrm{Sp}L = \mathrm{Sp}(K \cup L)$

כמו כן, מאחר ש-

$$\dim W_1 + \dim W_2 = 4 = \dim \mathrm{R}^4$$

הרי הסכום W_1+W_2 הוא <u>ישר</u>. הראינו אפוא כי $\mathrm{R}^4 = W_1 \oplus W_2$.

ג. מתוצאות סעיף א של השאלה נובע כי:

$$[T_{W_1}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[T_{W_2}]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ד. מתוצאות סעיף א של השאלה נובע כי:

$$Tv_1 = 2v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4$$

$$Tv_2 = v_1 + 2v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4$$

$$Tv_3 = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 3\cdot v_3 + 0\cdot v_4$$

$$Tv_4 = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + v_3 + 3\cdot v_4$$

ולכן:

$$[T]_B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

כלומר (ראה חלק ג):

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|c} [T_{W_1}]_{B_1} & 0 \\ \hline 0 & [T_{W_2}]_{B_2} \end{array}\right)$$