אינפי 3 תרגיל 9־פתרונות

שאלה 1

סעיף 1

$$F_z = 2z - e^z$$

$$F_z(0,e,2) = 4 - e^2 \neq 0$$

ולכן המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x, y.

$$F_x = y, \quad F_y = 2y + x$$

ולכן בסביבת הנקודה $(0,e)$ מתקיים ש:

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{y}{e^z - 2z}, \quad z_y(x,y) = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2y+x}{e^z - 2z}$$

ולכן

$$z_x(0,e) = \frac{e}{e^2-4}, \quad z_y(0,e) = \frac{2e}{e^2-4}$$

כעת

$$z_{xy}(x,y) = (\frac{2y+x}{e^z-2z})'_y = \frac{2(e^z-2z) - (e^z-2z)z_y(2y+x)}{(e^z-2z)^2}$$

$$z_{xy}(0,e) = \frac{2(e^2-4) - (e^2-4)\frac{2e}{e^2-4}(2e)}{(e^2-4)^2} = \frac{2(e^2-4) - 4e^2}{(e^2-4)^2} = \frac{-2e^2-8}{(e^2-4)^2}$$

סעיף 2

$$F_z = x + \frac{y}{z}$$

$$F_z(-2,0,2) = -2 \neq 0$$

ולכן המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x, y.

$$F_x = z + 2x, \quad F_y = \ln z$$

ולכן בסביבת הנקודה $(-2,0)$ מתקיים ש:

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{z+2x}{x+\frac{y}{z}}, \quad z_y(x,y) = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\ln z}{x+\frac{y}{z}}$$

ולכן

$$z_x(-2,0) = -\frac{2-4}{-2} = -1, \quad z_y(-2,0) = -\frac{\ln 2}{-2} = \frac{\ln 2}{2}$$

כעת

$$z_{xy}(-2,0) = (-\frac{z+2x}{x+\frac{y}{z}})'_y|_{(-2,0)} = -\frac{z_y(x+\frac{y}{z}) - (\frac{z-yz_y}{z^2})(z+2x)}{(x+\frac{y}{z})^2}|_{(-2,0)} =$$
$$-\frac{\frac{\ln 2}{2}(-2) - (\frac{2}{4})(2-4)}{4} = \frac{-\ln 2+1}{4}$$

שאלה 2

נכתוב

$$F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^5+\cos z - 1} - z^4 - 1$$

סעיף 1

$$F_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}}$$

לכן

$$F_x(-1,0,0) = \frac{-1}{\sqrt{1+0+1-1}} = -1 \neq 0$$

ולכן F מגדירה את x כפונקציה של y, z.

סעיף 2

$$F_y = \frac{5y^4}{2\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}}$$

לכן

$$F_y(-1,0,0) = 0$$

ולכן לא ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה. אבל, קל לראות שניתן לחלץ את y מהמשוואה

$$y =^5 \sqrt{(z^4+1)^2 - x^2 - \cos z + 1}$$

ולכן המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x, z.

סעיף 3

$$F_z = \frac{-\sin z}{2\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}} - 4z^3$$

ולכן

$$F_z(-1,0,0)=0$$

לכן לא ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה. אבל אפשר לשים לב שאם $(-1-\delta,0,t)$ הוא פתרון למשוואה עבור $\delta,\epsilon>0$ אז גם $(-1-\delta,0,-t)$ הוא פתרון למשוואה. כלומר, לכל סביבת ϵשל $(-1,0,0)$ קיים איזשהו $\delta>0$ ושני ערכים z_1,z_2 כך ש $(-1-\delta,0,z_1)$ ו $(-1-\delta,0,z_2)$ נמצאים בסביבה ו

$$F(-1-\delta,0,z_1)=F(-1-\delta,0,z_2)=0$$

ולכן F לא מגדירה את z כפונקציה של x,y.

שאלה 3

לפי משפט הפונקציה הסתומה:

$$\frac{\partial x}{\partial y}(a_2,a_3) = -\frac{F_y(a)}{F_x(a)}, \quad \frac{\partial y}{\partial z}(a_1,a_3) = -\frac{F_z(a)}{F_y(a)}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(a_1,a_2) = -\frac{F_x(a)}{F_z(a)}$$

ולכן ברור ש

$$\frac{\partial x}{\partial y}(a_2,a_3)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}(a_1,a_3)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(a_1,a_2) = -\frac{F_y(a)}{F_x(a)} - \frac{F_z(a)}{F_y(a)} - \frac{F_x(a)}{F_z(a)} = -1$$

שאלה 4

היות ו $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ ברור ש F מגדירה את y כפונקציה של x.לפי נוסחת הגזירה:

$$y_x(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

לפי הנתונים $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ $\quad F_x(x_0,y_0)=0,$ זה בהכרח מחייב

$$y_x(x_0)=0$$

כעת נגזור שוב לפי x את השוויון:

$$y_{xx}(x) = -(\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)})'_x = -\frac{(F_{xx}(x,y)+F_{xy}(x,y)y_x)F_y(x,y)-(F_{xy}(x,y)+F_{yy}(x,y)y_x)F_x(x,y)}{(F_y(x,y))^2}$$

ולכן:

$$y_{xx}(x_0) = -\frac{F_{xx}(x_0,y_0)F_y(x_0,y_0)}{(F_y(x_0,y_0))^2} = -\frac{F_{xx}(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)} \neq 0$$

לכן x_0 היא נקודת מינימום או מקסימום של y. היות ו y רציפה, לכל סביבת ϵ של y_0 קיים איזה y' כך ש

$$|y' - y| < \epsilon$$

וקיימים x_1, x_2 כך , ש

$$y(x_1) = y(x_2) = y'$$

(כי x_0 היא נקודת מינימום או מקסימום). לכן לכל סביבת ϵ של (x_0, y_0) קיימים x_1, x_2, y' כך שנמצאים בסביבה ו

$$F(x_1, y') = F(x_2, y') = 0$$

ולכן F לא מגדירה את x כפונקציה של y בסביבת הנקודה (x_0, y_0).

שאלה 5

סעיף א

השאלה היא בעצם האם המשוואות

$$u^2 + v^2 + w^2 = 29, \quad \frac{u^2}{x^2} + \frac{v^2}{y^2} + \frac{w^2}{z^2} = 17$$

מגדירות את u, v כפונקציות של x, y, z, w בסביבת $(2, 1, -1, -2, 4, 3)$
לפי משפט הפונקציה הסתומה צריך לבדוק את המטריצה

$$\begin{pmatrix} F_{1u} & F_{1v} \\ F_{2u} & F_{2v} \end{pmatrix}$$

$$F_1 = u^2 + v^2 + w^2 - 29$$

ולכן

$$F_{1u} = 2u, \quad F_{1v} = 2v$$

ולכן

$$F_{1u}(2, 1, -1, -2, 4, 3) = 8, \quad F_{1v}(2, 1, -1, -2, 4, 3) = 6$$

באותו אופן

$$F_2 = \frac{u^2}{x^2} + \frac{v^2}{y^2} + \frac{w^2}{z^2} - 17$$

ולכן

$$F_{2u} = 2\frac{u}{x^2}, \quad F_{2v} = 2\frac{v}{y^2}$$

ולכן

$$F_{2u}(2,1,-1,-2,4,3)=2, \quad F_{2v}(2,1,-1,-2,4,3)=6$$

קיבלנו את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

שהיא הפיכה כי הדטרמיננטה שלה היא $48-12=36$. לכן לפי משפט הפונקציה הסתומה מתקיים כי F מגדירה את u,v כפונקציה של x,y,z,w.

סעיף ב

לפי משפט הפונקציה הסתומה,

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{pmatrix}$$

לכן נחשב את F_{1x} ואת F_{2x}

$$F_{1x}=0, \quad F_{2x}=-2\frac{u^2}{x^3}$$

לכן

$$F_{1x}(2,1,-1,-2,4,3)=0, \quad F_{2x}(2,1,-1,-2,4,3)=-4$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

באותו אופן:

$$F_{1z}=0, \quad F_{2z}=-2\frac{w^2}{z^3}$$

לכן

$$F_{1z}(2,1,-1,-2,4,3)=0, \quad F_{2z}(2,1,-1,-2,4,3)=8$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_z \\ v_z \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_z \\ v_z \end{pmatrix}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 48 \\ -64 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$$

שאלה 6

נבדוק את תנאי משפט הפונקציה הסתומה לכך שמערכת המשוואות מגדירה את u, v, z כפונקציות של x, y. הדטרמיננטה שצריך לבדוק היא:

$$\left|\begin{pmatrix} f_z & f_u & f_v \\ g_z & g_u & g_v \\ h_z & h_u & h_v \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ h_z & h_u & h_v \end{pmatrix}\right| = h_z \left|\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\right|$$

לפי הנתון באמת מתקיים

$$h_z \left|\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\right| \neq 0$$

ואז המערכת מגדירה את z, u, v כפונקציות של x, y ובפרט את z כפונקציה של x, y.
לפי משפט הפונקציה הסתומה

$$\begin{pmatrix} 0 & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ h_z & h_u & h_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ u_x \\ v_x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_x \\ g_x \\ h_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לפי כלל קרמר

$$z_x = \frac{\left|\begin{pmatrix} -f_x & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ 0 & h_u & h_v \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ h_z & h_u & h_v \end{pmatrix}\right|} = \frac{-f_x \left|\begin{pmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}\right|}{h_z \left|\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\right|} = \frac{f_x \left|\begin{pmatrix} h_u & h_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\right|}{h_z \left|\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\right|}$$

וזה בדיוק הדרוש