אלגברה ליניארית – תרגיל 5

<u>שאלה 1</u>

תהיי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T\left(x_1,x_2\right)=\left(-2x_1+2x_2,x_1-3x_2\right)$

מצא את $A=\left[T\right]_E$, המטריצה המייצגת של T בבסיס הסטנדרטי.

<u>פתרון</u>

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ הוא $B=\left\{\left(1,0\right),\left(0,1\right)\right\}$. $T\left(1,0\right)=\left(-2,1\right),T\left(0,1\right)=\left(2,-3\right)$ ולכן

$A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

<u>שאלה 2</u>

תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ההעתקה הלינארית המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+4x_2+5x_3\\ 2x_2+6x_3\\ 3x_3\end{pmatrix}$$

א. מצא את A, המטריצה הסטנדרטית של T.

ב. האם T חד חד ערכית? האם T על? נמק!

<u>פתרון</u>

א. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ הוא $B=\left\{\left(1,0,0\right),\left(0,1,0\right),\left(0,0,1\right)\right\}$.

$$T\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 6\\ 3\end{pmatrix}$$

ולכן $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

ב. מכיוון ש A מטריצה הפיכה T חח"ע ועל.

<u>שאלה 3</u>

יהי $T:R^3\to R^3$ העתקה ליניארית הנתונה ע"י הנוסחה

$T(x,y,z)=(x-2y,-y,z)$.

א) מצאו מטריצה A של T בבסיס הסטנדרטי.

ב) האם T הפיך? מצאו כל ווקטורים $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ כך ש- $T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

א. $T(1,0,0)=(1,0,0), T(0,1,0)=(-2,-1,0), T(0,0,1)=(0,0,1)$

ולכן $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

ב. המטריצה A הפיכה ולכן T הפיך. $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ ולכן

$$\begin{cases}x-2y=3\\-y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow x=1, y=-1, z=1\Rightarrow T\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 4</u>

נתונה העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y\\x-y+2z\\y-\frac{3}{2}z\end{pmatrix}$

א. מצא בסיס ואת המימד של הגרעין של T.

ב. מצא בסיס ואת המימד של - $\operatorname{Im}T$.

ג. עבור אילו ערכי a הווקטור $\begin{pmatrix}2\\2\\a\end{pmatrix}$ שייך לתמונה של T ?

<u>פתרון</u>

א. הגרעין של T הוא קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית $\begin{cases}3x+y=0\\x-y+2z=0\\y-\frac{3}{2}z=0\end{cases}$.

נמצא את הבסיס של קבוצת הפתרונות של המערכת

$$\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-1&2\\0&1&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\overset{R_1-3R_2\to R_2}{\sim}\begin{pmatrix}3&1&0\\0&4&-6\\0&1&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\overset{R_2-4R_3\to R_3}{\sim}\begin{pmatrix}3&1&0\\0&4&-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

המשתנה החופשי הוא z נציב $z=2$ ונקבל ש $x=-1, y=3$ הבסיס של הגרעין הוא $\{(-1,3,2)\}$

והמימד 1.

ב. כדי למצוא בסיס ומימד ל $\operatorname{Im} T$ ניקח את הבסיס הסטנדרטי ב $\mathbb{R}^3$.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$ ואז $$\operatorname{Im} T = span\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\right\}$$ נמצא בסיס

למרחב וקטורי הנ"ל:

$$\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-1&2\\0&1&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\overset{R_1-3R_2\to R_2}{\sim}\begin{pmatrix}3&1&0\\0&4&-6\\0&1&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\overset{R_2-4R_3\to R_3}{\sim}\begin{pmatrix}3&1&0\\0&4&-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$ ולכן הבסיס הוא

$\{(3,1,0),(0,4,-6)\}$.

ג. יש לבדוק לאילו ערכי a יש פתרון למערכת ז"א לאילו ערכי a $\begin{pmatrix}2\\2\\a\end{pmatrix}\in \operatorname{Im} T$.

מכיוון ש $\alpha\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\4\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\a\end{pmatrix}$ ש $\alpha=\frac{2}{3},\beta=\frac{1}{3}$ רק עבור $a=-2$ נקבל פתרון למערכת.

<u>שאלה 5</u>

תהיי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ההעתקה הליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(x,y)$ מצא את המטריצה A המייצגת את T ביחס לבסיסים $B:=\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,0)\}$ בתחום ו $C:=\{(2,1),(-3,-1)\}$ בטווח.

<u>פתרון</u>

$T(1,0,1)=(1,0), T(1,1,0)=(1,1), T(0,1,0)=(0,1)$.

נרשום עבור כל אחד מהוקטורים שקיבלנו את הווקטור קוארדינטות ביחס לבסיס $C:=\{(2,1),(-3,-1)\}$.

$$(1,0)=-1\cdot(2,1)-1\cdot(-3,-1)\Rightarrow[(1,0)]_C=(-1,-1)$$
$$(1,1)=2\cdot(2,1)+1\cdot(-3,-1)\Rightarrow[(1,1)]_C=(2,1)$$
$$(0,1)=3\cdot(2,1)+2\cdot(-3,-1)\Rightarrow[(0,1)]_C=(3,2)$$

ולכן $[T]_C^B=\begin{pmatrix}-1&2&3\\-1&1&2\end{pmatrix}$.

<u>שאלה 6</u>

א. הוכח שלשתי מטריצות המייצגות את $T:V\to W$ (ביחס לבסיסים שונים) יש אותה דרגה.

ב. תנו דוגמה של העתקות ליניאריות $T:M_{2\times2}(\mathbb{R})\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ו $S:M_{2\times2}(\mathbb{R})\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ כך ש $TS\neq ST$.

<u>פתרון</u>

א. הדרגה היא המימד של $\operatorname{Im}T$ והיא אינה תלויה בבחירת הבסיסים.

ב. למשל:

$$T\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t&0\\0&0\end{pmatrix},S\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$TS\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$ST\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}t&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t&0\\0&0\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 7</u>

נתונה המטריצה $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$. יהי $T_a:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T_a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

עבור אילו ערכים של הפרמטר a $\dim(\ker T_a)$ הוא מקסימאלי ועבור אילו ערכים של הפרמטר a $\dim(\operatorname{Im}T_a)$ הוא מקסימאלי.

<u>פתרון</u>

מכיוון שלכל a ההעתקה הנ"ל היא לא העתקת האפס נקבל שלכל a $KerT_a\neq\mathbb{R}^3$ ולכן $\dim(\ker T_a)\le 2$.

$$\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}\overset{\substack{R_1-R_2\to R_2\\ aR_1-R_3\to R_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1-a&a-1\\0&a-1&a^2-1\end{pmatrix}\overset{R_2+R_3\to R_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1-a&a-1\\0&0&a^2+a-2\end{pmatrix}$$

עבור $a=1$ נקבל ש $\dim(\ker T_a)=2$ ולכן עבור $a=1$ נקבל ש $\dim(\ker T_a)$ הוא מקסימאלי.

עבור $a\neq1,a\neq-2$ המטריצה הפיכה ולכן ההעתקה היא על ואז $\dim(\operatorname{Im}T_a)$ הוא מקסימאלי.

שאלה 8

א. נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T(f)=\begin{pmatrix} f(0)-f(1) \\ f(0) \\ f(1)\end{pmatrix}$.

i. מצאו מטריצה של T בבסיסים הסטנדרטיים.

ii. מצאו בסיס ומימד של $KerT$ ושל $\operatorname{Im}T$.

ב. נתונה העתקה $T:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ המוגדרת ע"י $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d\end{pmatrix}$.

i. הוכיחו ש T העתקה ליניארית.

ii. מצאו בסיס ומימד של $KerT$ ושל $\operatorname{Im}T$.

פתרון

א. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$ הוא $\{x^2,x,1\}$ ואז

$$T(1)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},T(x)=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},T(x^2)=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$ ולכן $[T]=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

נמצא בסיס ומימד לגרעין: יש לפתור את המערכת ההומוגנית $\begin{cases}-\alpha-\beta=0\\ \gamma=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\overset{R_1+R_3\to R_3}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\overset{R_2-R_3\to R_3}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ המשתנה החופשי הוא β נציב $\beta=1$

ונקבל $\alpha=-1,\gamma=0$. הבסיס לגרעין הוא $\{x^2-x\}$ והמימד הוא 1.

דרך נוספת: אם $f\in\mathbb{R}_2[x]$ אז $f(0)=f(1)\Rightarrow f(x)=ax(x-1)\big|a\in\mathbb{R}$.

נמצא בסיס ומימד לתמונה.

מכיוון ש $\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\overset{R_1+R_3\to R_3}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\overset{R_2-R_3\to R_3}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ אז הבסיס ל $\operatorname{Im}T$ הוא

$\{(-1,-1,0),(0,0,1)\}$ והמימד הוא 2.

ב. נוכיח ש T העתקה ליניארית.

יהיו $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} a_1+a_2 & -(c_1+c_2) \\ -(b_1+b_2) & d_1+d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -c_1 \\ -b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -c_2 \\ -b_2 & d_2 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)$$

יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ ו $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha a & -\alpha c \\ -\alpha b & \alpha d \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix} = \alpha T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

נמצא בסיס ומימד לגרעין

$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$ ולכן $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a=b=c=d=0$ הבסיס הוא ϕ

והמימד הוא 0.

מכיוון ש $\dim V = \dim(KerT) + \dim(ImT)$ נקבל ש $\dim(ImT) = 4$ ומכיוון ש

$\operatorname{Im}T \subseteq M_2(\mathbb{R}) \wedge \dim(\operatorname{Im}T) = \dim(M_2(\mathbb{R}))$ נקבל ש $\operatorname{Im}T = M_2(\mathbb{R})$ ואז ניתן לרשום את

הבסיס של $\operatorname{Im}T$ $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

<u>שאלה 9</u>

נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. העתקה ליניארית $S: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י

$S(X) = AX + XA$ כאשר $X \in M_2(\mathbb{R})$.

א. הוכיחו כי S העתקה ליניארית.

ב. האם S הפיך? אם כן, מצאו את S^{-1}.

<u>פתרון</u>

יהיו $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$.

$$S(X+Y) = A(X+Y) + (X+Y)A = AX + AY + XA + YA = AX + XA + AY + YA = S(X) + S(Y)$$

יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, $X\in M_2(\mathbb{R})$

$$S(\alpha X)=A(\alpha X)+(\alpha X)A=\alpha(AX)+\alpha(XA)=\alpha(AX+XA)=\alpha S(X)$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\Rightarrow a=-a\wedge b=-2b\wedge 2c=-c\wedge 2d=-2d\Rightarrow a=b=c=d=0$$

ולכן $KerS=0$ ומכיוון ש $\dim(M_2(\mathbb{R}))=\dim(KerS)+\dim(\operatorname{Im}S)$ נקבל ש $\operatorname{Im}(S)=M_2(\mathbb{R})$

ו S הפיכה. נשים לב ש $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ היא המטריצה אלמנטארית ולכן עבור מטריצה X המטריצה AX

היא המטריצה המתקבלת ע"י פעולת השורה האלמנטארית $2R_2\to R_2$ והמטריצה XA היא המטריצה

המתקבלת ע"י פעולת עמודה אלמנטארית $2C_2\to C_2$.

$S\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2a&3b\\3c&4d\end{pmatrix}$.

נמצא את העתקה ההופכית ל S .

$$\begin{pmatrix}2a&3b\\3c&4d\end{pmatrix}\overset{2C_1\to C_1}{\sim}\begin{pmatrix}4a&3b\\6c&4d\end{pmatrix}\overset{\frac12 R_2\to R_2}{\sim}\begin{pmatrix}4a&3b\\3c&2d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2a&3b\\3c&4d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4a&3b\\3c&2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6a&6b\\6c&6d\end{pmatrix}$$

ולכן $T(X)=\frac{1}{6}\left(X+\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ היא ההעתקה ההופכית.

<u>שאלה 10</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה **F**, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי המקיים: $T^4=T$.

א. הוכח: $V=\operatorname{Im}(T^3)+\operatorname{Ker}(T)$.

ב. האם הסכום בסעיף א' הוא ישר? נמק היטב.

<u>פתרון</u>

א. יהי $v\in V$. $v=T^3(v)+(v-T^3(v))$. $T^3(v)\in\operatorname{Im}T^3$, מכיוון ש $T^4=T$ נקבל $T(v-T^3(v))=T(v)-T^4(v)=0$ ולכן $v-T^3(v)\in Ker(T)$.

ב. נניח ש $\mathrm{v}\in\operatorname{Im}(T^3)\cap\operatorname{Ker}(T)$. $\mathrm{v}\in\operatorname{Ker}(T)\Leftarrow T(v)=0$, $\mathrm{v}\in\operatorname{Im}(T^3)$ ולכן קיים $\mathrm{u}\in\mathrm{V}$ כך ש $T^3(u)=v$ מכיוון ש $T^4=T$ נקבל

$$0=T(v)=T(T^3(u))=T^4(u)=T(u)\Rightarrow T^3(u)=T^2(T(u))=T^2(0)=0$$

ומכיוון ש $T^3(u)=v$ נקבל שבהכרח $v=0$ ז"א $\operatorname{Im}(T^3)\cap\operatorname{Ker}(T)=\{0\}$ והסכום ישר.

<u>שאלה 11</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F כך שב F $1+1\neq 0$ (מתמטיקאים אומרים בקיצור: המאפיין אינו 2) .

תהי $T\in Hom(V,V)$ המקיימת $T^2=I$. נסמן:

$W=\{w\in V \mid T(w)=w\}$ ו $U=\{u\in V \mid T(u)=-u\}$.

א. הראה ש U הוא תת מרחב של V. (כמובן, גם W הוא תת מרחב של V, אל תוכיח זאת!).

ב. הראה שאם $T(v)=z$ אז $v+z\in W$ ו $v-z\in U$.

ג. הוכח כי $V=U\oplus W$.

ד. הוכח או הפרך: לכל $v\in V$ מתקיים $T(v)=v$ או $T(v)=-v$

<u>פתרון</u>

א. יהיו $u_1,u_2\in U$ ז"א $T(u_1)=-u_1 \wedge T(u_2)=-u_2$.

$T(u_1+u_2)=T(u_1)+T(u_2)=-u_1-u_2=-(u_1+u_2)$ ולכן $u_1+u_2\in U$.

יהי $u\in U$ ו $\alpha\in F$ $T(\alpha u)=\alpha T(u)=\alpha\cdot(-u)=-\alpha u$ ולכן $\alpha u\in U$.

ב. נתון ש $T^2=I$ ולכן

$$T(v+z)=T(v+T(v))=T(v)+T^2(v)=T(v)+v=z+v$$
$$T(v-z)=T(v-T(v))=T(v)-T^2(v)=z-v=-(v-z).$$

ג. $v=2^{-1}((v-z)+(v+z))$ כאשר $T(v)=z$. אם $v\in U\cap W$ אז

$T(v)=v\wedge T(v)=-v\Rightarrow v=0$.

ד. לא בהכרח נכון. דוגמה נגדית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ מוגדר ע"י $T(x,y)=(x,x-y)$.

$T(T(x,y))=T(x,x-y)=(x,y)$.