1)

א. נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&1&2&7\\2&4&-3&2\\3&0&15&3\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow}{R_3=R_3-2R_1}\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&1&2&7\\0&0&-9&4\\3&0&15&3\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow}{R_4=R_4-3R_1}\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&1&2&7\\0&0&-9&4\\0&-6&6&6\end{pmatrix}$$

$$\underset{\longrightarrow}{R_4=R_4+6R_2}\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&1&2&7\\0&0&-9&4\\0&0&18&48\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow}{R_4=R_4+2R_3}\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&1&2&7\\0&0&-9&4\\0&0&0&56\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3&-1\\0&1&2&7\\0&0&-9&4\\0&0&0&56\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot(-9)\cdot56=-504$$

היות וכל פעולות השורה שהשתמשנו בהם, הם מהסוג $R_i=R_i+kR_j$ מתקיים ש

$$\begin{vmatrix}1&2&3&-1\\0&1&2&7\\2&4&-3&2\\3&0&15&3\end{vmatrix}=-504$$

ב. נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}0&2&3&4\\2&0&4&3\\3&4&0&2\\4&3&2&0\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow}{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}2&0&4&3\\0&2&3&4\\3&4&0&2\\4&3&2&0\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow}{R_3=2R_3}\begin{pmatrix}2&0&4&3\\0&2&3&4\\6&8&0&4\\4&3&2&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{\longrightarrow}{R_3=R_3-3R_1}\begin{pmatrix}2&0&4&3\\0&2&3&4\\0&8&-12&-5\\4&3&2&0\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow}{R_4=R_4-2R_1}\begin{pmatrix}2&0&4&3\\0&2&3&4\\0&8&-12&-5\\0&3&-6&-6\end{pmatrix}$$

$$\underset{\longrightarrow}{R_3=R_3-4R_2}\begin{pmatrix}2&0&4&3\\0&2&3&4\\0&0&-24&-21\\0&3&-6&-6\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow}{R_4=2R_4}\begin{pmatrix}2&0&4&3\\0&2&3&4\\0&0&-24&-21\\0&6&-12&-12\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow}{R_4=R_4-3R_2}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&4&3\\0&2&3&4\\0&0&-24&-21\\0&0&-21&-24\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow}{R_3=\frac{1}{3}R_3}\begin{pmatrix}2&0&4&3\\0&2&3&4\\0&0&-8&-7\\0&0&-21&-24\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow}{R_4=\frac{8}{3}R_4}\begin{pmatrix}2&0&4&3\\0&2&3&4\\0&0&-8&-7\\0&0&-56&-64\end{pmatrix}$$

$$\underset{\longrightarrow}{R_4=R_4+7R_3}\begin{pmatrix}2&0&4&3\\0&2&3&4\\0&0&-8&-7\\0&0&0&-15\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2&0&4&3\\0&2&3&4\\0&0&-8&-7\\0&0&0&-15\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot(-8)\cdot(-15)=480$$

כעת צריך לבדוק איזה פעולות משנות דטרמיננטה עשינו ומה התיקון בשביל כל אחת מהן.

- $R_1\leftrightarrow R_2$, תיקון: הכפלה ב -1.
- $R_3=2R_3$, תיקון: הכפלה ב $\frac{1}{2}$.
- $R_4=2R_4$, תיקון: הכפלה ב $\frac{1}{2}$.
- $R_3=\frac{1}{3}R_3$, תיקון: הכפלה ב 3.

- $R_4=\frac{8}{3}R_4$, תיקון: הכפלה ב $\frac{3}{8}$.

לכן

$$\begin{vmatrix}0&2&3&4\\2&0&4&3\\3&4&0&2\\4&3&2&0\end{vmatrix}=(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{3}{8}\cdot480=-135$$

ג. נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}3&4&4\\1&a&2\\2&3&3\end{pmatrix}\overset{R_2\leftrightarrow R_3}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}3&4&4\\2&3&3\\1&a&2\end{pmatrix}\overset{R_3=3R_3}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}3&4&4\\2&3&3\\3&3a&6\end{pmatrix}\overset{R_2=3R_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}3&4&4\\6&9&9\\3&3a&6\end{pmatrix}$$

$$\overset{R_2=R_2-2R_1}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}3&4&4\\0&1&1\\3&3a&6\end{pmatrix}\overset{R_3=R_3-R_1}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}3&4&4\\0&1&1\\0&3a-4&2\end{pmatrix}\overset{R_3=R_3-(3a-4)R_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}3&4&4\\0&1&1\\0&0&6-3a\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}3&4&4\\0&1&1\\0&0&6-3a\end{vmatrix}=3(6-3a)=18-9a$$

כעת צריך לבדוק איזה פעולות משנות דטרמיננטה עשינו ומה התיקון בשביל כל אחת מהן.

- $R_2\leftrightarrow R_3$, תיקון: הכפלה ב -1.
- $R_3=3R_3$, תיקון: הכפלה ב $\frac{1}{3}$.
- $R_2=3R_2$, תיקון: הכפלה ב $\frac{1}{3}$.

לכן

$$\begin{vmatrix}3&4&4\\1&a&2\\2&3&3\end{vmatrix}=(18-9a)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=a-2$$

לכן המטריצה הפיכה כש $a\neq2$.

2) $$adj(A)=\begin{pmatrix}b^2-a^2&a^2-ab&a^2-ab\\a^2-ab&b^2-a^2&a^2-ab\\a^2-ab&a^2-ab&b^2-a^2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot adj(A)=\begin{pmatrix}b&a&a\\a&b&a\\a&a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^2-a^2&a^2-ab&a^2-ab\\a^2-ab&b^2-a^2&a^2-ab\\a^2-ab&a^2-ab&b^2-a^2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}b^3-3a^2b+2a^3&0&0\\0&b^3-3a^2b+2a^3&0\\0&0&b^3-3a^2b+2a^3\end{pmatrix}$$

לכן $|A|=b^3-3a^2b+2a^3$

3) א. $\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$ ב. המטריצה הפיכה אם"ם $a_i\neq a_j\ \ \forall i\neq j$

4) נסמן מינור ה i,j של מטריצה A ע"י $M_{i,j}(A$

א. $adj(cA)_{i,j} = (-1)^{i+j}\left|\underbrace{M_{j,i}(cA)}_{\in\mathbb{F}^{(ni1)x(n-1)}}\right| = (-1)^{i+j}c^{n-1}\left|M_{j,i}(A)\right| = c^{n-1}adj(A)_{i,j}$

ב. A אנטי סימטרית ולכן $A^{\mathrm{t}} = -\mathrm{A}$. בנוסף ידוע $|A| = |A^t|$ ולכן

$|A| = 0 \Leftarrow |A| = |A^t| = |-A| = (-1)^n|A| = -|A|$

ג. קל לראות שלכל מינור של מטריצה כזאת יש שורת אפסים. ולכן $adj(A)_{i,j} = (-1)^{i+j}\left|M_{j,i}(A)\right| = 0$

ד. נשתמש ב $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$:

$adj(P^{-1}AP) = (P^{-1}AP)^{-1}|P^{-1}AP| = P^{-1}A^{-1}P|P^{-1}||A||P| = P^{-1}A^{-1}|A|P = P^{-1}adj(A)P$

ה. $adj(A)_{i,j} = (-1)^{i+j}|M_{j,i}(A)|$

לכן

$adj(A^t)_{i,j} = (-1)^{i+j}\left|M_{j,i}(A^t)\right| = (-1)^{i+j}\left|(M_{j,i}(A))^t\right| = (-1)^{i+j}\left|(M_{i,j}(A))\right| = adj(A)_{j,i}$
$= {adj(A)_{i,j}}^t$

לכן $adj(A^t) = adj(A)^t$

ו. היות ו A הפיכה, $|A| \neq 0$. לפי המשפט היסודי של האלגברה, קיים $c \in \mathbb{C}$ כך ש $c^n = \frac{1}{|A|}$.

ואז $|cA| = c^n\,|A| = \frac{1}{|A|}\,|A| = 1$.

5) כידוע $[\mathrm{T}]_{\mathrm{C}} = [\mathrm{I}]_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}}[\mathrm{T}]_{\mathrm{D}}[\mathrm{I}]_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}$ וגם $([I]_D^C)^{-1} = [\mathrm{I}]_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}}$ ולכן $|A| = |[T]_C| = \left|[\mathrm{I}]_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}}[\mathrm{T}]_{\mathrm{D}}[\mathrm{I}]_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}\right| =$
$\left|([I]_D^C)^{-1}\right||[\mathrm{T}]_{\mathrm{D}}|\left|[\mathrm{I}]_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}\right| = |[\mathrm{T}]_{\mathrm{D}}| = |B|$

6) א. X=5, y=1, z=1

ב. x=21/26, y=29/26

7) לפי כלל קרמר $x_i = \frac{|A_i(b)|}{|A|}$ (כאשר $A_i(b)$ היא המטריצה A שהחליפו בה את עמודה i ב b.)

לפי הנתון, כל האיברים בA_i שלמים לכן גם $|A_i|$ הוא מספר שלם.

לכן $x_i = \frac{|A_i(b)|}{|A|} = |A_i|$ הוא גם מספר שלם לכן i.

8) באינדוקציה על n : כלל האינדוקציה הוא $|A_n| = -|A_{n-1}|$

9) נבצע ארבע פעולות עמודה

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&2\\2&1&0&2&9\\3&6&6&0&1\\4&7&2&7&7\\5&2&2&9&2\end{pmatrix}\begin{matrix}C_5=C_5+10C_4\\C_5=C_5+100C_3\\\longrightarrow\\C_5=C_5+1000C_2\\C_5=C_5+10000C_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&12342\\2&1&0&2&21029\\3&6&6&0&36601\\4&7&2&7&47277\\5&2&2&9&52292\end{pmatrix}$$

כעת,

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4&2\\2&1&0&2&9\\3&6&6&0&1\\4&7&2&7&7\\5&2&2&9&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&3&4&12342\\2&1&0&2&21029\\3&6&6&0&36601\\4&7&2&7&47277\\5&2&2&9&52292\end{vmatrix} = 17\begin{vmatrix}1&2&3&4&726\\2&1&0&2&1237\\3&6&6&0&2153\\4&7&2&7&2781\\5&2&2&9&3076\end{vmatrix}$$