מבחן לינארית 1 קיץ תשפא מועד ב

ו' תשרי תשפ"ב, 12.9.2021

מרצים: גיא בלשר, תמר בר-און, אליהו מצרי, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, נועה כהן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (21 נק') יהא $a \in \mathbb{R}$ פרמטר ונגדיר

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a^2+1 \\ -a^2-1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ -1 \\ a^2+a+1 \end{pmatrix}$$

(וקטורים ב $\mathbb{R}^4$). ענו על הסעיפים הבאים:

(א) קבעו והוכיחו לאילו ערכים של a מתקיים $v_4 \in \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

(ב) לכל ערך של a, מצאו את המימד של $\text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

(ג) הביעו באמצעות הפרמטר a את הדטרמיננטה של המטריצה

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & a \\ a & a^2+1 & 1 & a+1 \\ -a & -a^2-1 & a & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & a^2+a+1 \end{pmatrix}$$

(כלומר, המטריצה שעמודותיה הן הוקטורים v_1, v_2, v_3, v_4).

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

2. (21 נק') נגדיר העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ ע"י הכלל

$$T(A)=A-A^t$$

(כאשר הקלט ל T הוא מטריצה $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$). אין צורך להוכיח שזוהי העתקה לינארית. בנוסף, נגדיר

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$
$$C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

שני בסיסים סדורים (משמאל לימין) של $\mathbb{R}^{2\times 2}$. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B^C$ ואת המטריצה המייצגת $[T]_B^B$.

(ב) מצאו בסיס ומימד ל $\mathrm{Im}T$ ומצאו בסיס ומימד ל $\ker T$.

(ג) מצאו את המטריצה המייצגת $\left[T^2\right]_C^C$, כאשר T^2 היא ההעתקה הלינארית $T\circ T$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

3. (21 נק') תזכורת: $\mathbb{R}_n[x]$ הוא המרחב הוקטורי של כל הפולינומים שדרגתם קטנה שווה מ n עם מקדמים ב $\mathbb{R}$.

יהא $a \in \mathbb{R}$ פרמטר ונגדיר

$$W_a = \{p(x) \cdot (x - a) \mid p(x) \in \mathbb{R}_2[x]\}$$

תת קבוצה של פולינומים שמוכלת ב $\mathbb{R}_3[x]$. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) הוכיחו כי W_a הוא תת מרחב של $V = \mathbb{R}_3[x]$.

(ב) מצאו בסיס ומימד ל W_a.

(ג) הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים שונים $a_1 \neq a_2$ מתקיים כי $W_{a_1} + W_{a_2} = \mathbb{R}_3[x]$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

4. (21 נק').

(א) תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית שאינה הפיכה. הוכיחו את הטענה הבאה:

$\dim\left(N(A)\cap N(A^t)\right) \geq 1$ אם ורק אם קיימת מטריצה סימטרית $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שונה מאפס כך ש $AB = BA = 0$.

(ב) <u>הוכיחו או הפריכו</u>: לכל מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, אם $\mathrm{rank}A < \frac{n}{2}$ אז קיימת מטריצה סימטרית $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שונה מאפס כך ש $AB = BA = 0$.

(ג) <u>הוכיחו או הפריכו</u>: לכל מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, אם $\mathrm{rank}A \leq \frac{n}{2}$ אז קיימת מטריצה סימטרית $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שונה מאפס כך ש $AB = BA = 0$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

5. (21 נק') יהא V מרחב וקטורי מימד n, ותהיינה שתי העתקות לינאריות (אופרטורים) $T, S : V \to V$.
<u>הוכיחו או הפריכו</u> כל אחד מהסעיפים הבאים:

(א) אם T העתקה הפיכה אזי קיים בסיס B למרחב V כך ש $[T]_B^B = \left[T^{-1}\right]_B^B$.

(ב) אם T העתקה הפיכה אזי קיימים בסיסים B, C למרחב V כך ש $[T]_C^B = \left[T^{-1}\right]_B^C$.

(ג) $\dim \ker T + \dim \mathrm{Im} S = \dim V$ אם ורק אם קיימים בסיסים B, C, D, E למרחב V כך ש $[T]_C^B = [S]_E^D$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___