מופשטת 1 תשע"ו - תרגיל בית 3

1 בנובמבר 2015

תרגיל 1:

א. תהי G חבורה סופית, $a, b \in G$. הוכיחו: $o(ab) = o(ba)$.

רמז: אם $o(ab) = n$, הסתכלו על $(ba)^{n+1}$.

ב. תהי G חבורה, $g \in G$ כך ש $o(g) = n$. הוכיחו: $a \equiv b \mod n \iff g^a = g^b$.

תרגיל 2:

א. נגדיר $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$. הוכיחו ש$G$ חבורה ביחס לפעולת כפל מטריצות. חשבו את הסדר של G ואת הסדר של כל איבר ב G.

ב. תהי G חבורה כך שלכל $a, b \in G$ מתקיים $(ab)^3 = a^3 b^3$. האם בהכרח G אבלית?

תרגיל 3:

אילו מן החבורות הבאות הן ציקליות? עבור החבורות הציקליות מצאו יוצר, אחרת הסבירו מדוע החבורה אינה ציקלית.

א. $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}$

ב. $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$

ג. U_{20}

ד. $U_8 \times U_9$

ה. $U_{10} \times \mathbb{Z}_5$

תרגיל 4:

א. תהיינה H, G_1, G_2 תת חבורות של G. הוכיחו שאם $H \subseteq G_1 \cup G_2$ אז $H \subseteq G_1$ או $H \subseteq G_2$.

ב. תנו דוגמא לחבורה G ותת חבורות H, G_1, G_2, G_3 כך ש $H \subseteq G_1 \cup G_2 \cup G_3$ אבל לכל $i \in \{1, 2, 3\}$, $H \nsubseteq G_i$.

תרגיל 5:

א. מצאו תת חבורה ציקלית מסדר 8 ותת חבורה לא ציקלית מסדר 8 של U_{32}.

ב. מצאו בתוך $(\mathbb{Q}, +)$ שרשרת אינסופית עולה של תת חבורות ציקליות. (רמז: הראשונה נוצרת ע"י 1)

תרגיל 6:

תהי G חבורה. נסמן $m_2(G) = |\{x \in G : x^2 = 1\}|$.

א. הראו שבכל חבורה סופית מתקיים: $m_2(G) \equiv |G| \mod 2$.

ב. הראו שבכל חבורה עם מספר זוגי של איברים קיים איבר מסדר 2.

הדרכה לסעיף א': הסתכלו על יחס השקילות הבא על G: $x \equiv y \iff x = y \vee xy = 1$.
מה הגודל של כל מחלקת שקילות?