בעיית SUBSET SUM

נותנים לנו סדרה של מספרים (נגיד $(18, 12, 4, 11, 23, 4, 25)$) ומספר(נגיד 52) ושואלים אם יש תת קבוצה שהסכום שלה הוא בדיוק המספר.

$SUBSETSUM$ מוגדרת ככל הזוגות (s, t) כך שS מולטי-קבוצה של מספרים טבעיים, t טבעי, וישנה $A \subseteq S$ כך שסכום אברי A הינו t.

משפט

$NPC \ni SUBSETSUM$

הוכחה

$NP \ni SUBSETSUM$:

ננחש\נקבל קבוצה A. נבדוק ש$A \leq S$ ושסכום אברי A הינו בדיוק t. הבדיקה פולינומית.

$NPH \ni SUBSETSUM$:

ברדוקציה מVC

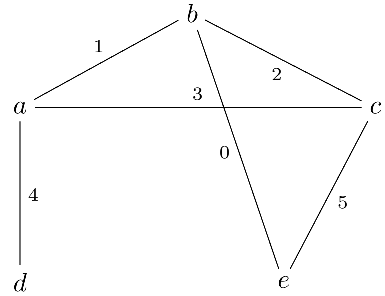
רוצים בהינתן (G, k) לבנות (S, t) כך שלG כיסוי קודקודים בגודל k אס"ם ישנה תת קבוצה $A \subseteq S$ שסכומה בדיוק t.

- הקבוצה S: נסמן את קשתות G ב $e_0, e_1, ...e_{m-1}$
  שני מקורות למספרים:

  א. "מספר קשתות"
  עבור הקשת e_i נתאים את המספר 10^i

  ב. "מספרי קודקודים"
  לכל קודקוד $v \in G$ יהיו E_v הקשתות ששכנות לv. אזי נתאים לv את המספר $x_v = 10^m + \sum_{i:e_i \in E_V} 10^i$

- המספר t: $t = k \cdot 10^m + \sum_{i=0}^{m-1} 2 \cdot 10^i$



$$
\begin{array}{rcl}
1 & \rightarrow & e_0 \\
10 & \rightarrow & e_1 \\
100 & \rightarrow & e_2 \\
1000 & \rightarrow & e_3 \\
10000 & \rightarrow & e_4 \\
100000 & \rightarrow & e_5 \\
1011010 & & a \\
1000111 & & b \\
1101100 & & c \\
1010000 & & d \\
1100001 & & e
\end{array}
$$

נסתכל על התכונות של זה. אין זליגה שכן אנו עובדים בבסיס עשר ולכל קשת מחוברים מקסימום 2 קודקודים. לכן אם אנחנו מצליחים להגיע ל$k22222...$ אנחנו יודעים בוודאות שכל 2 הגיע מהקשת ומקודקוד אחד שנגע בה.

נניח $B \subseteq G$ קבוצת קודקודים בG $|B| = k$ כיסוי קודקודים בG. נראה קבוצה $A \subseteq S$ שסכומה t.

בקבוצה A יהיו המספרים הבאים:

1. כל המספרים שמתאימים לקודקודי B
2. לכל קשת e_i אם לא שני צדי e_i בB, נכניס לA את המספר שמתאים לe_i

נסתכל בעמודה הi, $0 \le i \le m-1$.

אזי בהכרח (כיוון שB כיסוי קודקודים) ישנו לפחות "1" אחד מתוך המספרים של A שהתקבלו מקודקודים. אם ישנם שניים אזי הסכום הינו 2 ואחרת משלימים את הסכום ל"2" ע"י הוספת המספר שמתאים לקשת. כמו כן, הסכום בעמודה האחרונה הינו k - כמספר המספרים שהגיעו מקודקודים.

בכיוון ההפוך.

נניח $A \subseteq S$ שסכומה t. נבנה כיסוי קודקודים לG בגודל k. כיסוי הקודקודים יכלול את כל הקודקודים שהמספרים המתאימים להם הינם בA.

נשים לב שכיוון שאין נשא(curry) מעמודה לעמודה בA(או S) ערך k בעמודה הmית בהכרח אומר שישנם בדיוק k מספרי קודקודים בA. כמו כן, נשים לב שכל מספרי הקשתות במצורף נותנים רק "1" אחד בכל עמודה(מבין $0, ...m-1$)

כיוון שסכום איברי A נותן "2" בעל עמודה בהכרח מתוך המספרים שמתאימים לקודקודים מקבלים לפחות תוספת של "1" לכל עמודה($0, ...m-1$)

כלומר, לכל i, ישנו שכן בכיסוי הקודקודים כנדרש.

■

הרפדוקציה פולינומית

כמות מספרי קשתות - m. גודל כל אחד$\leq m$

כמות מספרי קודקודים$\leq n \leq m$

גודל כל אחד$\leq m-1$

סה"כ גודל כולל

$$\leq m^2 + (m+1)\,n = O\left(|G|^2\right)$$

הערה

כדי ש$SUBSETSUM$ תהיה NP שלמה, הייצוג של המספרים חייב להיות בינארי(או עשרוני). אם הייצוג הוא אונרי, הבעייה בP.

בעיית SCH

רשימת מטלות $W = \{w_i\}_{i=1}^{m}$. כל מטלה $w_i = (t_i, b_i, s_i)$ - כמה זמן היא לוקחת(t), מה הזמן המוקדם ביותר שמותר להתחיל אותה(b), ומה הזמן המאוחר ביותר שמותר לסיים אותה(s).

לא ניתן לבצע מספר עבודות במקביל ולא ניתן להפסיק פעילות של עבודה באמצע.

נגדיר $SCH \subseteq \{\{w_i\}_{i=1}^{m}\}$ כך שלכל i, $w_i = (t_i, b_i, s_i)$ וישנו תכנון זמנים לעבודות שעונה על כל האילוצים.

משפט

$NPC \ni SCH$

הוכחה

$NP \ni SCH$:

בהינתן זמני התחלה $x_1, ...x_n$ לעבודות $w_1, ...w_n$ נבדוק שמתקיימים כל האילוצים.

$NPH \ni SCH$

ברדוקציה מ$SUBSETSUM$

רוצים

בהינתן (S, z) לבנות קבוצת עבודות $w = \{w_i\}_{i=1}^{n}$ כך שלS תת קבוצה שסכומה z אם"ם ניתן לתזמן את כל העבודות בw לפי האילוצים.

נסמן $S = \{x_1, ...x_n\}$ ו$Y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$

לכל $x_i \in S$ נתאים עבודה $w_i \in W$: $\begin{matrix} t_i = x_i \\ b_i = 0 \\ s_i = Y+1 \end{matrix}$. בנוסף, ב$W$ העבודה $\hat{w} = \left(\hat{t}, \hat{b}, \hat{s}\right)$ כך ש $\begin{matrix} \hat{t} = 1 \\ \hat{b} = z \\ \hat{s} = z+1 \end{matrix}$

נשים לב שכל פתרון לתכנון הזמנים של w בהכרח שם את $\hat{w}$ בקטע $[z, z+1]$ והעבודה לוקחת את כל הקטע, ולכן ישנו פתרון לw אס"ם ניתן לתזמן את שאר העבודות בקטע $[0, z]$ ו$[z+1, Y+1]$. הגודל הכולל של קטעים אלו הינו בדיוק Y, ולכן כל תזמון כזה יצטרך למלא את הקטעים הללו לגמרי.

קיבלנו אם כן שישנו תזמון כנ"ל אס"ם ישנו תזמון שממלא את הקטע $[0, z]$ כולו, שזה אס"ם ישנה תת קבוצה של S שסכומה בדיוק z.

■

המבחן

- משך המבחן - שעתיים וחצי
- מבנה המבחן יהיה דומה למבחנים בשנתיים-שלוש הקודמות
- הכל כלול בחומר של המבחן
- חומר סגור(=בלי חומר)
- תרגילים(לפתור בעיות שלא ראינו קודם)
- בד"כ יש שאלה או סעיף משאלה משיעורי הבית
- דברים שהיו בהרצאה.
  - להוכיח חלק מהוכחה ארוכה.
  - ליישם הוכחה(להפעיל רדוקציה על קלט מסויים)