

תרגיל בית 4 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1 (חימום). יהי $\sigma \in S_n$ מחזור מאורך k . מצאו את $o(\sigma)$.

שאלה 2. מצאו איבר מסדר 6 בחבורה S_5 .

שאלה 3. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ונגדיר את התומך של σ להיות

$$\text{supp}(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) \neq i\}$$

במילים אחרות, אלו הם המספרים ש- σ "מזיזה". נאמר ששתי תמורות σ ו- τ הן זרות אם $\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau) = \emptyset$.

א. תנו דוגמה לתמורות לא זרות שאינן מתחלפות.

ב. תנו דוגמה לתמורות לא זרות שמתחלפות.

ג. הוכיחו שאם $i \in \text{supp}(\sigma)$, אז גם $\sigma(i) \in \text{supp}(\sigma)$.

ד. הוכיחו שכל זוג תמורות זרות מתחלף.

שאלה 4. לכל תמורה σ מהתמורות הבאות, כתבו את σ כמכפלת מחזורים זרים וחשבו את σ^2 , σ^{20} ואת $o(\sigma)$.

א. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 9 & 7 & 1 & 6 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$

ב. $\sigma = (1\ 2)(2\ 5\ 4)(3\ 1\ 4)(1\ 5) \in S_5$

שאלה 5. תהינה G, H חבורות. האם כל תת-חבורה K של $G \times H$ היא בהכרח מהצורה $K_1 \times K_2$, כאשר K_1 תת-חבורה של G ו- K_2 תת-חבורה של H ? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

שאלה 6. כתבו תוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, כלומר מקבלת את השורה השנייה בהצגת תמורה כמטריצה בגודל $2 \times n$, ומדפיסה את התמורה כמכפלת מחזורים זרים.

רשות: הרחיבו את התוכנה כך שתקבל כמה תמורות, ותדפיס את מכפלתן כמכפלת מחזורים זרים. למעשה אפשר לממש מחלקה שמייצגת תמורה, עם מתודות לכפל תמורות, למעבר בין ייצוגים שונים של התמורה, לתומך וכו'.

בהצלחה!