1. תהי $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות רציפות במידה שווה בקטע I המתכנסת במידה שווה לפונקציה f.
   א. הוכיחו שהפונקציה f רציפה במידה שווה בקטע I.
   ב. הוכיחו/הפריכו: אם נתון שההתכנסות ל f נקודתית (ולא בהכרח במ"ש) אז f רציפה במידה שווה בקטע I.

<u>פתרון</u>

א. יהי $\varepsilon > 0$. הסדרה $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת לפונקציה f במידה שווה ולכן קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge n_0$ ולכל $x \in I$ מתקיים $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.
בפרט, לכל $x \in I$ מתקיים $\left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. f_{n_0} רבמ"ש בקטע I ולכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in I$ המקיימות $|x-y| < \delta$ מתקיים $\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. בסה"כ נקבל שאם $x, y \in I$ ו- $|x-y| < \delta$ אז מאי שוויון המשולש נובע ש:

$$|f(x) - f(y)| \le \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\right| + \left|f_{n_0}(y) - f(y)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ולכן הפונקציה f רציפה במידה שווה בקטע I.

ב. נפריך ע"י דוגמה נגדית. לכל $n \in \mathbb{N}$ תהי $f_n(x) = x^n$ ויהי $I = [0,1]$. קיבלנו סדרת פונקציות רציפות ומכיון שמדובר בקטע סגור הן רבמ"ש. גבול הסדרה הוא הפונקציה הלא רציפה ולכן גם לא רבמ"ש $f(x) = \begin{cases} 0 & x \ne 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

2. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רבמ"ש. לכל $n \in \mathbb{N}$, נגדיר $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$. הוכיחו ש $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת במ"ש ל f.

<u>פתרון</u>

יהי $\varepsilon>0$. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רבמ"ש ולכן קיים $\delta>0$ כך שאם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. יהי $n_0\in\mathbb{N}$ המקיים $\frac{1}{n_0}<\delta$ אזי לכל $n>n_0$ מתקיים $\left|x+\frac{1}{n}-x\right|=\frac{1}{n}\le\frac{1}{n_0}<\delta$. לכן, לכל $n>n_0$ מתקיים לכל $x\in\mathbb{R}$:

$|f_n(x)-f(x)|=\left|f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right|<\varepsilon$. זה מוכיח ש $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת במ"ש ל f.