פתרון תרגיל 12 בפונקציות מרוכבות

1. בכל השאלה הזאת נסמן $\Gamma_R = \{z \mid z \in \mathbb{R} \quad -R \le z \le R\} \cup \{z \mid \mathrm{Im}(z) \ge 0 \quad |z| = 1\}$ מסילה המכוונת עם כיוון השעון, ו $\Delta_R = \{z \mid \mathrm{Im}(z) \ge 0 \quad |z| = 1\}$ כנ"ל. לכן ברור שלכל פונקציה $f(z)$

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\Delta_R} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z$$

(א) ראשית נשים לב שהאינטגרל קיים (לפי השוואה עם $\frac{1}{x^2}$) ולכן מספיק לחשב את

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x$$

נגדיר

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-2z+5)^2} = \frac{1}{(z-(1+2i))^2(z-(1-2i))^2}$$

לכן אם R מספיק גדול (נניח $R > 5$) אז כל הסינגולריות שיש לפונקציה בחצי המישור העליון (במקרה הזה, $1+2i$) נמצאים כבר בתוך Γ_R ולכן לפי משפט השאריות

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{1}{(z-(1+2i))^2(z-(1-2i))^2}\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z), 1+2i)$$

כמובן ש $1+2i$ הוא קוטב מסדר 2 ולכן אם נסמן

$$g(z) = \frac{1}{(z-(1-2i))^2}$$

השארית היא

$$\mathrm{Res}(f(z), 1+2i) = \lim_{z\to 1+2i} g'(z) = \lim_{z\to 1+2i} \frac{-2}{(z-(1-2i))^3} = \frac{-2}{-64i} = -\frac{i}{32}$$

ולכן

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{-i}{32} = \frac{\pi}{16}$$

לכל $R > 5$. כעת נעבור לאינטגרל

$$\int\limits_{\Delta_R} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\Delta_R} \frac{1}{(z^2-2z+5)^2}\mathrm{d}z$$

נוכיח שכאשר $R \to \infty$ האינטגרל שואף ל 0. נתחיל ממה שהוא די ברור, ש $f(z)$ מתנהג בערך כמו $\frac{1}{R^4}$ וליתר דיוק:
נשים לב ש

$$|z^2 - 2z + 5| \geq ||z|^2 - |-2z+5|| = |R^2 - |-2z+5||$$

אבל

$$|-2z+5| \leq 2|z| + 5 = 2R + 5$$

ולכן עבור ערכי R גדולים

$$R^2 \geq 2R + 5 \geq |-2z+5|$$

נקבל ש

$$|z^2 - 2z + 5| \geq |R^2 - |-2z+5|| = R^2 - |-2z+5| \geq R^2 - 2R - 5$$

ולכן עבור ערכי R גדולים (שבהם בפרט $R^2 - 2R - 5$ חיובי)

$$|f(z)| = |\frac{1}{(z^2-2z+5)^2}| \leq \frac{1}{(R^2-2R-5)^2}$$

נזכור שהאורך של Δ_R הוא πR ולכן לפי משפט על חסם ML מתקיים ש

$$|\int\limits_{\Delta_R} \frac{1}{(z^2-2z+5)^2} \mathrm{d}z| \leq \frac{\pi R}{(R^2-2R-5)^2} \overset{R\to\infty}{\to} 0$$

ולכן אם נזור לשוייון

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\Delta_R} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z$$

ונפעיל $\lim\limits_{R\to\infty}$ נקבל ש

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{16}$$

ולכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16}$$

(ב) נשתמש בטכניקה דומה לסעיף א'. ראשית נשים לב שהאינטגרל קיים (נניח, לפי מבחן דירכלה כי קל לבדוק ש $\frac{x}{x^2-2x+2}$ מונוטונית יורדת ומתכנסת ל 0) ולכן מספיק לחשב את

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x\cos x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$$

נגדיר

$$f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+2}$$

ואז עבור $z\in\mathbb{R}$ מתקיים ש

$$\frac{x\cos x}{x^2-2x+2}=\operatorname{Re}f(z)$$

כלומר

$$\int_{-R}^{R}\frac{x\cos x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R}\operatorname{Re}f(z)\mathrm{d}z=\operatorname{Re}\int_{-R}^{R}f(z)\mathrm{d}z$$

(השייון האחרון נכון כי האינטגרל על תחום ממשי) כלומר הערך המבוקש הוא

$$\operatorname{Re}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+2}\mathrm{d}z$$

את זה נחשב בטכניקה דומה לסעיף א'. ראשית נשים לב ש

$$z^2-2z+2=(z-(1+i))(z-(1-i))$$

ולכן עבור ערכי R גדולים (כך ש $1+i$ נמצא בתוך Γ_R) אנחנו יודעים לפי משפט השאריות ש

$$\int_{\Gamma_R}\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+2}\mathrm{d}z=\int_{\Gamma_R}\frac{ze^{iz}}{(z-(1+i))(z-(1-i))}\mathrm{d}z=2\pi i\frac{(1+i)e^{i-1}}{2i}=\pi(1+i)e^{i-1}$$

כעת לפי משפט ז'ורדן

$$|\int_{\Delta_R}\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+2}\mathrm{d}z|\leq\pi\max_{z\in\Delta_R}\frac{z}{z^2-2z+2}$$

וכמו קודם בגלל ש $|\frac{z}{z^2-2z+2}|$ הוא בערך $\frac{1}{R}$ נקבל שכאשר R שואף ל ∞ גם האינטגרל שלנו שואף ל 0. ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x\cos x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x=\operatorname{Re}\pi(1+i)e^{i-1}=\frac{\pi}{e}\operatorname{Re}((1+i)e^{i})$$

$$=\frac{\pi}{e}(\cos 1-\sin 1)$$

(ג) ראשית נשים לב שהפונקציה המדוברת זוגית ולכן

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\cos 2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

והאינטגרל בבירור מתכנס ולכן נחשב את

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1+\cos 2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

בשיטה הרגילה

$$\int_{\Gamma_R}\frac{1}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z=\int_{\Gamma_R}\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\mathrm{d}z$$

אם נסמן

$$g(z)=\frac{1}{(z+i)^2}$$

אז נקבל

$$g'(z)=\frac{-2}{(z+i)^3}$$

ולכן

$$\int_{\Gamma_R}\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\mathrm{d}z=2\pi i g'(i)=2\pi i\frac{-2}{(2i)^3}=\frac{-4\pi i}{-8i}=\frac{\pi}{2}$$

שוב קל לוודא ש

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Delta_R}\frac{1}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z=0$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

בעוד שאת

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

נחשב עם הפונקציה

$$f(z)=\frac{e^{2iz}}{(1+z^2)^2}=\frac{e^{2iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

כרגיל נגדיר

$$g(z)=\frac{e^{2iz}}{(z+i)^2}$$

ואז

$$g'(z)=\frac{2ie^{2iz}(z+i)^2-2(z+i)e^{2iz}}{(z+i)^4}$$

ולכן

$$\int\limits_{\Gamma_R}\frac{e^{2iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}\mathrm{d}z=2\pi i g'(i)=2\pi i\frac{2ie^{-2}(-4)-4ie^{-2}}{16}=e^{-2}\frac{16\pi+8\pi}{16}=\frac{3\pi}{2e^2}$$

כמו כן אם $|z|=R$ אז עבור ערכי R מספיק גדולים

$$|z^2+1|\geq|z|^2-1=R^2-1$$

ולכן

$$|\frac{1}{(z^2+1)^2}|\leq\frac{1}{(R^2-1)^2}$$

ואז לפי הלמה של ז'ורדן מתקיים ש

$$|\int\limits_{\Delta_R}\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z|\leq\frac{\pi}{2}\frac{1}{(R^2-1)^2}$$

ולכן זה מתכנס ל 0 כאשר R שואף לאינסוף. לסיכום

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z=\frac{3\pi}{2e^2}$$

ו

$$\int\limits_0^\infty\frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2e^2})=\frac{\pi}{8}(1+\frac{3}{e^2})$$

2. נשתמש במשפט רושה ונגדיר $f(z)=-z$ אז לפי הנתון על עיגול היחידה

$$|g(z)|\leq 1=|-z|$$

ולכן מספר האפסים של $-z$ בתוך כדור היחידה הוא כמספר האפסים של $g(z)-z$ דהיינו 1.

3. נניח בשלילה שלכל נקודה z עם $|z|=1$ מתקיים $|p(z)|<1$. ונגדיר $f(z)=-z^n$ אז מתקיים שעל מעגל היחידה

$$|g(z)|<|f(z)|$$

ולכן מספר האפסים ש $-z^n$ הבתוך מעגל היחידה כמספר האפסים של

$$g(z)+f(z)=a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

אבל ל $-z^n$ יש n אפסים בתוך מעגל היחידה ול $g(z)+f(z)$ יש לכל היותר $n-1$ אפסים בכל $\mathbb{C}$ (כי הוא פולינום ממעלה לכל היותר $n-1$) וזאת סתירה.