משוואות דיפרנציאליות רגילות – תרגיל IV

משוואות ברנולי, פתרונות סינגולריים ומשוואות קלרו :

משוואת ברנולי היא מסוג $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$

נגדיר $\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, $z=y^{1-n}$. נציב ונקבל את המשוואה $(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)(1-n)y^{1-n}=Q(x)(1-n)$

דוגמה : $y'+y=x\cdot y^{\frac{2}{3}}$ ואז $P(x)=1, Q(x)=x$. נגדיר $z=y^{\frac{1}{3}}$ ואז $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx}$. נציב הכל ונקבל $\frac{dz}{dx}+\frac{1}{3}z=\frac{1}{3}x$. זוהי משוואה לינארית מצורת $\frac{dz}{dx}+Pz=Q$ שהפתרון שלה הוא $z=e^{-I}\int Qe^{I}dx+ce^{-I}$ כאשר $I=\int P\,dx$

פתרונות סינגולריים :

1. לא מוגדרת
2. הנגזרת לא מוגדרת
3. הפתרון הסינגולרי לא יכול להתקבל מאף פתרון כללי
4. הוא פתרון מעטפת. יותר גדול מכולם. חוסם את הפונקציה כמו מין אסימפטוטה

דוגמה : $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$ ואז $\int\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=\int dx$ ולכן $\arcsin y=x+C$. הפתרון הכללי הוא $y=\sin(x+C)$. הפתרונות הסינגולריים שלה מתקבלים כשהנגזרת מתאפסת, וזה קורה ב±1. ניתן גם לראות שהם פתרונות מעטפת, הם הגדולים ביותר על הגרף של הפונקציה.

משוואות קלרו :

משוואות קלרו הם מהצורה $y=y'x+f(y')$. נגזור ונקבל $y'=y''x+y'+f'(y')y''$ נצמצם ואז $y''\left(x+f'(y')\right)=0$. לכן, מתקבל פתרון מעטפת (סינגולרי) $x=-f'(y')$. וגם $y''=0$ ואז $y'=C$ והמשוואה המתקבלת היא $y=Cx+f(C)$.

דוגמה : $(xy'-y)^2-(y')^2-1=0$ נעביר אגפים ונוציא שורש לקבל $xy'-y=\sqrt{1+(y')^2}$ ולכן $y=xy'-\sqrt{1+(y')^2}$. נגזור ונקבל $y'=xy''+y'-\frac{2y'y''}{2\sqrt{1+(y')^2}}$ ולכן $y''\left(x-\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)=0$ ובאופן דומה, הפתרון הסינגולרי הוא $x=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$ וגם מתקיים $y''=0$ ואז $y'=C$ ולכן $y=Cx-\sqrt{1+C^2}$. עבור הפתרון הסינגולרי, נמשיך מ$x=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$ וע״י העברת אגפים נקבל $y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ואז $y=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}+C$. אם C שווה אפס מתקבל מעגל היחידה.

דוגמה : $xy'^3-yy'^2+1=0$. נעביר את המשווא לצורת קלרו ונקבל $y=xy'+\frac{1}{y'^2}$. כמו שעשינו בתרגילים קודמים, נגזור את שתי האגפים. $y'=xy''+y'-\frac{2y''}{y'^3}$ ולכן $y''\left(x-\frac{2}{y'^3}\right)=0$. הפתרון הכללי הוא $y''=0$ ולכן $y'=C$ ואז $y=Cx+\frac{1}{C^2}$. עבור הפתרון הסינגולרי נקבל $y'=\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. נציב זאת במשוואה המקורית ונקבל $x\frac{2}{x}-y\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+1=0$ וע״י העברת אגפים $y=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}x^{\frac{2}{3}}$.