אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 2

4 בדצמבר 2019

1. פתרו את המשוואות הבאות:
   (א) $z^3 = 6\text{cis}\frac{\pi}{5}$
   (ב) $(\overline{z})^4 = 2+i$
   (ג) $z^3 \cdot (1+i) = 2$
   (ד) $3z^5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2}$

   פתרון:

   א. לפי המסקנה ממשפט דה־מואבר נקבל

$$z_k = \sqrt[3]{6}\text{cis}(\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{3}), k \in \{0,1,2\}$$

   כלומר, $z_0 = \sqrt[3]{6}\text{cis}\frac{\pi}{15}, z_1 = \sqrt[3]{6}\text{cis}\frac{11\pi}{15}, z_2 = \sqrt[3]{6}\text{cis}\frac{7\pi}{5}$.

   ב. נצמיד את שני הצדדים: $\overline{(\overline{z})^4} = 2-i$, ואז לפי כללי הצמוד נקבל:

$$z^4 = 2-i = \sqrt{5}\text{cis}333.435$$

   כעת נפעיל את דה־מואבר לקבל: $z_0 = \sqrt[8]{5}\text{cis}83.359, z_1 = \sqrt[8]{5}\text{cis}173.359, z_2 = \sqrt[8]{5}\text{cis}263.359, z_3 = \sqrt[8]{5}\text{cis}353.359$.

   ג. גם כאן צריך קצת משחק עד שרואים משוואה שאותה אנחנו יודעים לפתור עם דה־מואבר:

$$z^3 \cdot (1+i) = 2 \Rightarrow z^3 = \frac{2}{1+i} = \frac{2\text{cis}0}{\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\text{cis} - \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\text{cis}\frac{7\pi}{4}$$

   ועכשיו לפי דה־מואבר נקבל: $z_0 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\frac{7\pi}{12}, z_1 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\frac{15\pi}{12}, z_2 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\frac{23\pi}{12}$.

   ד. גם כאן צריך לסדר טיפה את המשוואה. נקבל:

$$z^5 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{3} = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i = \frac{2}{6}\text{cis}120$$

   עכשיו לפי דה־מואבר נקבל

$$z_k = \sqrt[5]{\frac{2}{6}}\text{cis}\left(\frac{120+360k}{5}\right)$$

   ואחרי הצבה נקבל: $z_0 = \sqrt[5]{\frac{2}{6}}\text{cis}24, z_1 = \sqrt[5]{\frac{2}{6}}\text{cis}96, z_2 = \sqrt[5]{\frac{2}{6}}\text{cis}168, z_3 = \sqrt[5]{\frac{2}{6}}\text{cis}240, z_4 = \sqrt[5]{\frac{2}{6}}\text{cis}312$.

2. שורשי היחידה.
   (א) מצאו שני שורשי יחידה שונים מסדר 5, z, w, כך ש־ $z \cdot w = 1$.
   (ב) מצאו שלושה שורשי יחידה שונים מסדר 7, z, w, q, כך ש $z \cdot w \cdot q = 1$

   פתרון:

   א. כזכור, שורשי היחידה מסדר 5 הם המספרים: $\text{cis}\frac{2\pi k}{5}, k \in \{0, \dots 4\}$. ניקח $k_1 = 2, k_2 = 3$ ונקבל:

$$\text{cis}\frac{2\pi \cdot 2}{5} \cdot \text{cis}\frac{2\pi \cdot 3}{5} = \text{cis}\left(\frac{2\pi \cdot 2}{5} + \frac{2\pi \cdot 3}{5}\right) = \text{cis}\frac{2\pi \cdot 5}{5} = \text{cis}2\pi = \text{cis}0 = 1$$

   כאשר בשיוויון הראשון השתמשנו במשפט דה־מואבר.

ב. באותו רעיון שורשי היחידה מסדר 7 הם $\text{cis}\frac{2\pi k}{7}, k \in \{0,\dots 6\}$. ניקח $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 4$ ונקבל:

$$\text{cis}\frac{2\pi \cdot 1}{7} \cdot \text{cis}\frac{2\pi \cdot 2}{7} \cdot \text{cis}\frac{2\pi \cdot 4}{7} = \text{cis}\left(\frac{2\pi \cdot (1+2+4)}{7}\right) = \text{cis}2\pi = 1$$

3. נתון המספר המרוכב $z = r\text{cis}\theta, r > 0$, ונתון עוד מספר $w = \frac{z}{\bar{z}}$.

(א) הביעו באמצעות r, θ את $w, \overline{w}, -\frac{1}{w}$.

(ב) נתון ש w נמצא ברביע הראשון. מהו טווח הזויות האפשרי עבור θ?

(ג) נתונה סדרה הנדסית a_n שבה $a_1 = \frac{1}{z}, a_2 = w$. הראו שאם z נמצא מחוץ למעגל היחידה אז גם a_5 נמצא מחוץ למעגל היחידה.

<u>פתרון:</u>

א. $w = \frac{r\text{cis}\theta}{r\text{cis}(-\theta)} = \text{cis}(\theta - (-\theta)) = \text{cis}2\theta$, ולכן נקבל: $\overline{w} = \text{cis}(-2\theta)$. על מעגל היחידה ההופכי והצמוד הם אותו דבר (באופן כללי: להופכי ולמצוד יש אותה זוית, והנורמות הופכיות אחת לשניה. על מעגל היחידה הנורמות מתלכדות ולכן זה יוצא אותו מספר.), ולכן נקבל: $-\frac{1}{w} = -\overline{w} = \text{cis}(\pi - 2\theta)$.

ב. הנתון נותן לנו תנאי על הזוית של w: $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$, ולכן נקבל שהטווח עבור θ הוא $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$.

ג. נבדוק מה המנה: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{w}{\frac{1}{z}} = w \cdot z = \text{cis}2\theta \cdot r\text{cis}\theta = r\text{cis}3\theta$. נקבל מכאן:

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = \frac{1}{r}\text{cis}(-\theta) \cdot (r\text{cis}3\theta)^4 = \frac{1}{r}\text{cis}(-\theta) \cdot r^4\text{cis}12\theta = r^3\text{cis}11\theta$$

כעת, אם $r > 1$ אז גם $r^3 > 1$, ולכן אם z מחוץ למעגל אז גם a_5.

4. פרקו את הפולינומים הבאים לגורמים ממשיים ממעלה לכל היותר 2:

(א) $x^4 + 16$

(ב) $x^3 + 1$

(ג) $x^5 + 32$

<u>פתרון:</u>

א. נמצא את פתרונות המשוואה $z^4 = -16 = 16\text{cis}\pi$: $z_k = 2\text{cis}(\frac{\pi + 2\pi k}{4}), k \in \{0,1,2,3\}$. הזויות הן: $\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$, ומכאן ששני הצמדים הם: $\{2\text{cis}\frac{3\pi}{4}, 2\text{cis}\frac{5\pi}{4}\}, \{2\text{cis}\frac{\pi}{4}, 2\text{cis}\frac{7\pi}{4}\}$. מכאן נוכל למצוא את הגורמים: הראשון:

$$(x - 2\text{cis}\frac{\pi}{4})(x - 2\text{cis}\frac{7\pi}{4}) = x^2 - 2Re(2\text{cis}\frac{\pi}{4})x + |2\text{cis}\frac{\pi}{4}|^2 = x^2 - 4\cos\frac{\pi}{4}x + 4 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$$

השני:

$$(x - 2\text{cis}\frac{3\pi}{4})(x - 2\text{cis}\frac{5\pi}{4}) = x^2 - 2Re(2\text{cis}\frac{3\pi}{4})x + |2\text{cis}\frac{3\pi}{4}|^2 = x^2 - 4\cos\frac{3\pi}{4}x + 4 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 4$$

ובסה"כ:

$$x^4 + 16 = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$$

ב. נמצא את פתרונות המשוואה $z^3 = -1 = \text{cis}180$: $z_k = \text{cis}60 + 120k, k \in \{0,1,2\}$. הזויות הן: $\{60, 180, 300\}$.
זוית של 180 נותנת לנו מספר ממשי (-1), וממנה נקבל את גורם ממעלה 1: $x + 1$.
שתי הזויות האחרות נותנות לנו שני מספרים צמודים שמהם נקבל את הגורם השני:

$$(x - \text{cis}60)(x - \text{cis}300) = x^2 - 2Re(\text{cis}60) + |\text{cis}60|^2 = x^2 - 2\cos 60 + 1 = x^2 - x + 1$$

ובסה"כ:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

ג. נמצא את פתרונות המשוואה $z^5 = -32 = 32\text{cis}180$. לפי דה־מואבר נקבל: $z_k = \sqrt[5]{32}\text{cis}\left(\frac{180+360k}{5}\right) = 2\text{cis}(36+72k)$. לכן: $z_0 = 2\text{cis}36, z_1 = 2\text{cis}108, z_2 = 2\text{cis}180 = -2, z_3 = 2\text{cis}252, z_4 = 2\text{cis}324$.

השורש $z_2 = -2$ הוא ממשי והוא נותן לנו גורם לינארי $(x+2)$.

זוג שורשים צמודים: $z_4 = \overline{z_0}$, וביחד הם תורמים לנו גורם ריבועי:

$$(x-2\text{cis}36)(x-\overline{2\text{cis}36}) = x^2 - 2Re(2\text{cis}36)x + |2\text{cis}36|^2 = x^2 - 4\cos(36)x + 4 \approx x^2 - 3.24x + 4$$

זוג שורשים צמודים: $z_3 = \overline{z_1}$, וביחד הם נותנים לנו גורם ריבועי:

$$(x-2\text{cis}108)(x-\overline{2\text{cis}108}) = x^2 - 2Re(2\text{cis}108)x + |2\text{cis}108|^2 = x^2 - 4\cos(108)x + 4 \approx x^2 + 1.24x + 4$$

ובסה"כ:

$$x^5 + 32 = (x+2)(x^2 - 3.24x + 4)(x^2 + 1.24x + 4)$$

5. **שאלת בונוס.** הוכיחו: אם n זוגי אז מכפלת שורשי היחידה מסדר n היא -1: $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = -1$, ואם n אי זוגי אז המכפלה היא 1: $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = 1$. כאשר $z_k = \text{cis}\frac{2\pi k}{n}$.

פתרון:

נשים לב:

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \prod_{k=0}^{n-1} \text{cis}\frac{2\pi k}{n} = \text{cis}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\pi k}{n}\right) = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} k\right)$$

כעת קיבלנו סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שבה הוא אפס, ולכן ניתן להתעלם ממנו. כלומר, $\sum_{k=0}^{n-1} k = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. לכן נקבל:

$$\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right) = \text{cis}\left((n-1)\pi\right)$$

עכשיו הגיע הזמן לחלק בין הזוגיים לאי־זוגיים. אם n אי זוגי אז $n-1$ זוגי, ומספר זוגי של π זה בדיוק כמו זוית האפס (להזכירכם, כל פעמיים π זה סיבוב אחד וחוזרים שוב להתחלה), ולכן נקבל $\text{cis}0 = 1$. אם n זוגי אז $n-1$ אי זוגי ואז זה בדיוק כמו זוית $\pi = 180°$ (כלומר, חצי סיבוב), ולכן נקבל $\text{cis}\pi = -1$.