אינפי 1 החממה ־ תרגול 6 תשפ"א

23 בנובמבר 2020

1 טורים ־ הגדרה ובדיקת התכנסות

הגדרות:

- תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הסיטוי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots$ נקרא הטור של הסדרה.
- יהי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ טור. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים שלו (סס"ח) להיות:S_n כאשר:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \end{cases}$$

כלומר, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. הגדרת התכנסות טור היא התכנסות הסס"ח שלו.

משפטים:

- אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $a_n \to 0$. שימו לב שזהו משפט חד כיווני.
- אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסים אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.
- לכל $c \neq 0$, הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

• עבור סדרה הנדסית $a_n = a_1 q^{n-1}$. נקבל שהסס"ח הוא: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, והגבול של הסס"ח יהיה שווה ל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ sgn(a_1)\infty & q \geq 1 \\ & q \leq -1 \end{cases}$$

תרגילים:

1. טור שסס"ח שלו מתכנסת ל־$\pm\infty$ נאמר שהוא מתבדר בתרגיל זה. תהי a_n סדרה חיובית הוכיחו או הפריכו:

(א) אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

פתרון: הוכחה: נקבל $a_n \to 0$ כי הטור מתכנס. לכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים: $a_n < \frac{1}{2}$, ולכן לכל $n > n_0$ נקבל $\frac{1}{a_n} > 2$, מה שאומר $\frac{1}{a_n} \not\to 0$. לכן הטור מתבדר.

(ב) אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [a_n]$ מתכנס, כאשר $[a_n]$ פירושו הערך השלם הקרוב ביותר ל־a_n (ואת $\frac{1}{2}$ נחליט שמעגלים כלפי מעלה).

פתרון: הוכחה: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $a_n \to 0$, ולכן יש n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n < \frac{1}{2}$, ולכן (כיון שזו סדרה חיובית) נקבל $[a_n] = 0$. ולכן:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n] = \sum_{n=1}^{n_0} [a_n] + 0$$

קיבלנו טור סופי, והוא בוודאי מתכנס.

2. האם הטור הבא מתכנס, אם כן מצאו את סכומו:

(א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{e}\left(1 - e^{-\frac{1}{n^2+n}}\right)$

פתרון: בואו נרשום את הסדרה בצורה טיפה שונה:

$$a_n = \sqrt[n]{e}\left(1 - e^{-\frac{1}{n^2+n}}\right) = e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{-\frac{1}{n(n+1)}}) = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}} = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$$

כי:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

ולכן:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n = \lim \left(e^1 - e^{\frac{1}{2}}\right) + \left(e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right) = e - e^{\frac{1}{n+1}} \to e - 1$$

(ב) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

פתרון: נתבונן על ת"ס הסכומים החלקיים: ת"ס הזוגיים ות"ס האי־זוגיים.
נתחיל מת"ס האי־זוגיים:

$$a_{2n} + a_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n}}{\lfloor \frac{2n}{2} \rfloor} + \frac{(-1)^{2n+1}}{\lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$$

ולכן:

$$S_{2n+1} = (a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2n}+a_{2n+1}) = 0+0+\cdots+0 = 0$$

מצד שני:

$$a_{2n+1} + a_{2n+2} = \frac{(-1)^{2n+1}}{\lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor} + \frac{(-1)^{2n+2}}{\lfloor \frac{2n+2}{2} \rfloor} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

ולכן:

$$S_{2n+2} = 1+(-1+\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+\cdots+(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1} \to 0$$

קיבלנו בסה"כ שתת סדרת הזוגיים ותת סדרת האי־זוגיים (של הסס"ח) שתיהן שואפות ל0, ולכן $S_n \to 0$. לכן הטור מתכנס ל־0.

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+2^{2n-1}-3^{n+1}}{6^n} \right)$

פתרון: נוכל כאן להפריד לטורים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+2^{2n-1}-3^{n+1}}{6^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^2)^n \cdot \frac{1}{2}}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty} -3\frac{3^n}{6^n} =$$

$$= 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

כל אחד מהטורים זה בעצם סדרה הנדסית, עם $-1 < q < 1$ ולכן:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

ולכן בסה"כ הטור שלנו מתכנס ל:

$$1+1-3=-1$$

2 מבחנים לטורים חיוביים

מבחן ההשוואה: אם a_n, b_n סדרות חיוביות, והחל ממקום מסויים $a_n \leq b_n$. אז:

- אם $\sum b_n < \infty$ אז גם הטור $\sum a_n$.
- אם $\sum a_n = \infty$ אז גם הטור $\sum b_n$.

אם קיים הגבול $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$. אז:

- אם $0 < L < \infty$ אז: מתכנסים ומתבדרים יחד.
- אם $L = 0$ אז מהתכנסות $\sum b_n$ נובעת התכנסות $\sum a_n$.
- אם $L = \infty$ אז מהתכנסות $\sum a_n$ נובעת התכנסות $\sum b_n$.

תרגילים:

1. $\sum \frac{\sin \frac{\pi}{n^2}}{n^2}$.
פתרון: נשים לב $0 \leq \sin \frac{\pi}{n^2} \leq 1$, ולכן הטור שלנו חיובי. ומתקיים: $\frac{\sin \frac{\pi}{n^2}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ וכיון שכידוע הטור $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס, נקבל שגם הטור שלנו מתכנס.

2. $\sum \frac{n!}{n^n}$
פתרון: כמובן שזהו טור חיובי. נשים לב:

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} < \frac{1 \cdot 2 \cdot n^{n-2}}{n^n} = 2 \cdot \frac{1}{n^2}$$

ושוב, כיון שהטור $\sum 2 \cdot \frac{1}{n^2}$ מתכנס לכן גם הטור שלנו מתכנס.

3. $\sum \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$
פתרון: נעשה מבחן ההשוואה השני עם ההרמוני:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{1}{n \sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

ולכן הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד, וכיון ש- $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר, אז גם שלנו.

4. $\sum \frac{\sqrt[7]{n^{14}+20n+15}}{(1+2n)^5}$
פתרון:

$$\frac{\sqrt[7]{n^{14}+20n+15}}{(1+2n)^5} \leq \frac{\sqrt[7]{n^{14}+20n^{14}+15n^{14}}}{(2n)^5} = \frac{\sqrt[7]{36}n^2}{(2n)^5} < \frac{\sqrt[7]{36}}{n^2}$$

ולכן מתכנס לפי מבחן ההשוואה הראשון.