חשבון אינפי 1

תרגיל 11-פתרון
משפט רול, משפט לגרנזי, משפט קושי, כלל לופיטל

1. הוכיחו כי לפולינום $\frac{5}{7}x^7+x^3+x+10$ יש שורש ממשי אחד בלבד.

הוכחה:
חזקת הפולינום אי זוגית ולכן יש **<u>לפחות</u>** שורש ממשי אחד .

נגדיר $f\left(x\right)=\frac{5}{7}x^7+x^3+x+10$

נניח בשלילה שקיימים שני מספרים ממשיים x_1 , x_2 (בה"כ $x_1<x_2$) כך ש :

$$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$$

בקטע $\left[x_1,x_2\right]$ פונקציה $f\left(x\right)$ מקיימת תנאי משפט רול , ז"א היא רציפה בקטע $\left[x_1,x_2\right]$

גזירה ב $\left(x_1,x_2\right)$ ו- $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$

ולכן קיימת נקודה $c\in\left[x_1,x_2\right]$ כך ש :

$$f'\left(c\right)=0$$

אבל

$$f'\left(x\right)=5x^6+3x^2+1\neq 0$$

לכל x ממשי .

הנחת שלילה לא נכונה$\Leftarrow$

$\Leftarrow$ יש רק שורש ממשי אחד

2. הוכיחו שלכל $0<a<b$ מתקיים $\frac{b-a}{1+b}<\ln\frac{1+b}{1+a}<\frac{b-a}{1+a}$.

הוכחה: נגדיר $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)$.

$f\left(x\right)$ רציפה בקטע $\left[a,b\right]$ וגזירה בקטע הפתוח ולכן לפי משפט לגרנז' קיימת נקודה $a<c<b$ כך

ש- $f'\left(c\right)=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$, ז"א $\frac{1}{1+c}=\frac{\ln\left(1+b\right)-\ln\left(1+a\right)}{b-a}$.

$0<a<c<b$ ולכן $1+a<1+c<1+b$ ולכן $\frac{1}{1+b}<\frac{1}{1+c}<\frac{1}{1+a}$ ומכאן

$$\frac{1}{1+b}<\frac{\ln(1+b)-\ln(1+a)}{b-a}<\frac{1}{1+a}$$
$$\frac{b-a}{1+b}<\ln\frac{1+b}{1+a}<\frac{b-a}{1+a}$$

כדרוש.

3. הוכיחו כי לכל $0<x<1$ מתקיים $\arctan x>\ln(1+x)$.

הוכחה:

נגדיר $f(x)=\arctan x$ ו- $g(x)=\ln(1+x)$.

שתי הפונקציות רציפות בקטע $[0,x]$ כאשר $0<x<1$ וגזירות בקטע הפתוח ולכן לפי משפט קושי קיימת נקודה

$0<c<x<1$ כך ש- $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}$, ז"א

$$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}=\frac{1+c}{1+c^2},$$

אבל

$$0<c<1$$
$$c^2<c$$
$$1+c^2<1+c$$
$$\frac{1+c}{1+c^2}>1$$

ולכן

$$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}>1$$

$$\forall\ 0<x<1\quad \arctan x>\ln(1+x)\Leftarrow$$

4. חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בכלל לופיטל) :

א. $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

פתרון:

$$\lim_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}\overset{1^\infty}{=}\ldots$$

$$y=(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$$

$$\ln y=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)$$

$$\lim_{x\to 1}\ln y=\lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{(2-x)}}{\frac{1}{-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2-x}=\frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}=e^{2/\pi}$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}\overset{\infty^0}{=}\ldots$$

$$y=\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}$$

$$\ln y=\frac{1}{\ln x}\ln\left(1+x^2\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{\left(1+x^2\right)}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+1\right)}=2$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}=e^2$$

ג. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)\overset{\infty-\infty}{=}\ldots$$

$$y=e^{\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)}=\frac{e^x}{1+2e^x}$$

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+2e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2e^x}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)\overset{\infty-\infty}{=}\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$$

ד. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)\ln x}{1+\cos(\pi x)}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)\ln x}{1+\cos(\pi x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos(\pi x)\ln x+\frac{\sin(\pi x)}{x}}{-\pi\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x)\ln x}{-\sin(\pi x)}-\frac{1}{\pi x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin(\pi x)\ln x+\frac{\cos(\pi x)}{x}}{-\pi\cos(\pi x)}-\frac{1}{\pi x}=-\frac{1}{2\pi}$$

ה. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\ln x\ln x}}{e^{x\ln(\ln x)}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln^2 x-x\ln(\ln x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln^2 x\left(1-\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^2 x}\right)}$$

נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^2 x}\right)$$

ע"י שימוש בכלל לופיטל

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^2 x}\right)\geq\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^2 x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2\ln x}$$

נשתמש בלופיטל פעם נוספת

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}=\infty$$

ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\ln^2 x\left(1-\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^2 x}\right)\overset{\infty\cdot(1-\infty)}{=}-\infty$$

ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\ln x\ln x}}{e^{x\ln(\ln x)}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln^2 x-x\ln(\ln x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln^2 x\left(1-\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^2 x}\right)}\overset{e^{-\infty}}{=}0$$

ו. $\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{\tan x}{x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)=1\cdot(-1-1)=-2$$