אינפי 4 - הרצאה 7

22 באוגוסט 2011

תזכורת

היינו באמצע הוכחת המשפט הבא:

משפט

הקבוצה

$$B_k = \left\{ dx_I \mid \begin{array}{c} I = (i_1, .., i_k) \\ 1 \leq i_1 \leq ... \leq i_k \leq n \\ i_j \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

מהווה בסיס ל$A^k(\mathbb{R}^n)$, כלומר לכל $\varphi \in A^k(\mathbb{R}^n)$ **יש הצגה יחידה מהצורה**

$$\varphi = \sum a_I dx_I$$

כאשר

$$a_I = \varphi(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$$

הוכחנו בשיעור שעבר את למה 1:
אם $I = (i_1, ..., i_k)$ **ו**$J = (j_1, ..., j_k)$ **סדרות עולות מתוך** $\{1, ..., n\}$ **אז:**

$$dx_I(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & I = J \\ 0 & I \neq J \end{cases}$$

כדי להוכיח המשפט, עבור $\varphi \in A^k(\mathbb{R}^n)$, לכל I עולה:

$$a_I = \varphi(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$$

ומגדירים

$$\psi = \sum_I a_I dx_I$$

צריך להראות ש$\varphi = \psi$.
ע"פ למה 2 (שנראה בהמשך) מספיק להראות שφ וψ מזדהות על $(e_{j_1}, ..., e_{j_k})$ לכל סדרה עולה $J = (j_1, ..., j_k)$.
נראה זאת:

$$\begin{aligned} \psi(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) &= \sum_I a_I dx_I(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) \\ &= a_J = \varphi(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) \end{aligned}$$

לכן הראנו שקבוצה זו פורשת.
נותר להראות שB_k בת"ל. נניח $\sum_I \alpha_I dx_I = 0$, אזי לכל בחירה של וקטורים $v_1, ..., v_k$ מתקיים:

$$\sum_I \alpha_I dx_I(v_1, ..., v_k) = 0$$

תהי J סדרה עולה מתוך $\{1, ..., n\}$, נתבונן בסכום:

$$0 = \sum_I \alpha_I dx_I(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = \alpha_J$$

לכן קיבלנו ש$\alpha_J = 0$ לכל J, לכן B_k בת"ל, ולכן סה"כ B_k בסיס.

למה 2

יהיו $\varphi,\,\psi\in A^{k}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.
אם לכל $I=\left(i_{1},\,...,\,i_{k}\right)$ תת סדרה עולה של $\left\{ 1,\,...,\,n\right\}$ מתקיים:

$$\varphi\left(e_{i_{1}},\,...,\,e_{i_{k}}\right)=\psi\left(e_{i_{1}},\,...,\,e_{i_{k}}\right)$$

אז

$$\psi=\varphi$$

הסבר של ההוכחה

מחשבים את

$$\varphi\left(v_{1},\,...,\,v_{k}\right)$$

תוך פיתוח של כל איבר v_{i} כצירוף לינארי של איברי הבסיס.
בסופו של דבר מקבלים ביטויים מהצורה

$$\alpha\cdot\varphi\left(e_{i_{1}},\,..,\,,\,e_{i_{k}}\right)$$

הביטויים היחידים ששונים מ0 הם הביטויים בהם $i_{1},\,...,\,i_{k}$ שונים.
אם האינדקסים מראש אינם עולים אפשר לסדר שיהיו עולים ע"י היפוכי סימן.

משפט Cauchy-Binet (עם הוכחה הפעם)

A מטריצה מסדר $k\times n$ ($k\leq n$), B מטריצה מסדר $n\times k$, אזי:

$$\det\left(AB\right)=\sum_{I}\det A_{I}^{t}\cdot\det B_{I}$$

הוכחה

נסמן ב$a_{1},\,...,\,a_{k}$ את וקטורי השורות של A, וב$b_{1},\,...,\,b_{k}$ את וקטורי העמודות של B.
אזי:

$$AB=\begin{pmatrix}a_{1}\cdot b_{1} & \cdots & a_{1}\cdot b_{k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{k}\cdot b_{1} & \cdots & a_{k}\cdot b_{k} \end{pmatrix}$$

כעת, אם ניקח את A כמטריצה קבועה (כלומר $a_{1},\,...,\,a_{k}$ נקבעו מראש), נגדיר:

$$\varphi\left(b_{1},\,...,\,b_{k}\right)=\det\left(AB\right)$$

לפי חוקי דטר' רואים כי φ היא העתקה מולטי-לינארית מתחלפת.
כעת, מכיוון שB_{k} בסיס יש סקלרים α_{I} כך שמתקיים

$$\varphi\left(b_{1},\,...,\,b_{k}\right)=\sum_{I}\alpha_{I}dx_{I}\left(b_{1},\,...,\,b_{k}\right)=\sum_{I}\alpha_{I}\det\left(B_{I}\right)$$

אבל:

$$\alpha_{I}=\varphi\left(e_{i_{1}}^{t},\,...,\,e_{i_{k}}^{t}\right)=\det\left(A_{I}^{t}\right)$$

לכן

$$\det\left(AB\right)=\sum_{I}\det\left(A_{i}^{t}\right)\cdot\det\left(B_{I}\right)$$

כפל תבניות - Wedge Product

יהיו $\varphi,\,\omega$ תבניות, φ מסדר k ו-ω מסדר ℓ.
המכפלה החיצונית של φ ו-ω המסומנת $\varphi\wedge\omega$ היא התבנית מסדר $k+\ell$ (שפועלת על $k+\ell$ וקטורים), מוגדרת ע"י הסכום שרץ על כל התמורות σ של המספרים $1,\,2,\,...,\,k+\ell$ כך שמתקיים

$$\begin{aligned}\sigma\left(1\right) &< ...<\sigma\left(k\right)\\ \sigma\left(k+1\right) &< ...<\sigma\left(k+\ell\right)\end{aligned}$$

והמכפלה מוגדרת כך:

$$\left(\varphi\wedge\omega\right)\left(v_{1},\,...,\,v_{k+\ell}\right)=\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}\left(k,\,\ell\right)}\mathrm{sign}\left(\sigma\right)\cdot\varphi\left(v_{\sigma(1)},\,...,\,v_{\sigma(k)}\right)\cdot\omega\left(v_{\sigma(k+1)},\,...,\,v_{\sigma(k+\ell)}\right)$$

כאשר

$$\mathrm{Sh}\left(k,\,\ell\right)=\left\{ \sigma\in S_{k+\ell}\mid\begin{array}{ccccc}\sigma\left(1\right) & < & ... & < & \sigma\left(k\right)\\ \sigma\left(k+1\right) & < & ... & < & \sigma\left(k+\ell\right)\end{array}\right\}$$

לא נוכיח ש-$\varphi\wedge\omega$ היא תבנית, נניח זאת.

דוגמאות

1. $k=2,\,\ell=1$. נתבונן בכל התמורות של $k+\ell=3$ וקטורים $v_{1},\,v_{2},\,v_{3}$:

$$\begin{array}{ccc}v_{1} & v_{2}| & v_{3}\\ v_{1} & v_{3}| & v_{2}\\ v_{2} & v_{3}| & v_{1}\end{array}$$

נשים לב ש-k הוקטורים הראשונים בסדר עולה ובאופן בלתי תלוי ℓ הוקטורים האחרונים גם בסדר עולה.

2. $k=3,\,\ell=2$:

$$\begin{array}{c}v_{1}v_{2}v_{3}|v_{4}v_{5}\\ v_{1}v_{2}v_{4}|v_{3}v_{5}\\ v_{1}v_{4}v_{5}|v_{2}v_{3}\\ v_{1}v_{2}v_{4}|v_{3}v_{5}\\ v_{1}v_{3}v_{4}|v_{2}v_{5}\\ v_{1}v_{3}v_{5}|v_{2}v_{4}\\ v_{2}v_{3}v_{4}|v_{1}v_{5}\\ v_{2}v_{3}v_{5}|v_{1}v_{4}\\ v_{2}v_{4}v_{5}|v_{1}v_{3}\\ v_{3}v_{4}v_{5}|v_{1}v_{2}\end{array}$$

3. מכפלה חיצונית של 1-forms:
נניח $\varphi,\,\psi$ 1-תבניות.
שתי התמורות האפשריות של $v_{1,}v_{2}$ הן $v_{1}|v_{2}$ ו-$v_{2}|v_{1}$ ושתיהן מותרות, כלומר $\in\mathrm{Sh}\left(1,\,1\right)$.
לכן:

$$\left(\varphi\wedge\omega\right)\left(v_{1},\,v_{2}\right)=\varphi\left(v_{1}\right)\cdot\omega\left(v_{2}\right)-\varphi\left(v_{2}\right)\omega\left(v_{1}\right)$$

4. נחשב למשל ב-$\mathbb{R}^{2}$ את $dx_{1}\wedge dx_{2}$ עבור $v_{1}=\left(a_{1},\,b_{1}\right),\,v_{2}=\left(a_{2},\,b_{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\left(dx_{1}\wedge dx_{2}\right)\left(v_{1},\,v_{2}\right) &= dx_{1}\left(v_{1}\right)\cdot dx_{2}\left(v_{2}\right)-dx_{1}\left(v_{2}\right)\cdot dx_{2}\left(v_{1}\right)\\ &= a_{1}b_{2}-a_{2}b_{1}=\begin{vmatrix}a_{1} & b_{1}\\ a_{2} & b_{2}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

5. ב-$\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} v_1 &= (a_1,\, b_1,\, c_1) \\ v_2 &= (a_2,\, b_2,\, c_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (dx_1 \wedge dx_2)(v_1,\, v_2) &= dx_1(v_1) \cdot dx_2(v_2) - dx_1(v_2)\, dx_2(v_1) \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

6. מכפלה של 2-תבנית ב-1-תבנית.
φ היא $2-\text{form}$, ω היא $1-\text{form}$.
נבחר את 3 התמורות הבאות של $v_1,\, v_2,\, v_3$ (בסה"כ יש 6):

$$\begin{array}{ll|l} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_3 & v_2 \\ v_2 & v_3 & v_1 \end{array}$$

לכן:

$$(\varphi \wedge \omega)(v_1,\, v_2,\, v_3) = \varphi(v_1,\, v_2)\, \omega(v_3) - \varphi(v_1,\, v_3)\, \omega(v_2) + \varphi(v_2,\, v_3)\, \omega(v_1)$$

לדוגמה, אם $\varphi = dx_{(1,\,2)}$ ו-$\omega = dx_3$ ואם:

$$v_i = (a_i,\, b_i,\, c_i)$$

נקבל:

$$\begin{aligned} \left(dx_{(1,\,2)} \wedge dx_3\right)(v_1,\, v_2,\, v_3) &= dx_{(1,\,2)}(v_1,\, v_2)\, dx_3(v_3) - dx_{(1,\,2)}(v_1,\, v_3)\, dx_3(v_2) + dx_{(1,\,2)}(v_2,\, v_3)\, dx_3(v_1) \\ &= c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = dx_{(1,\,2,\,3)}(v_1,\, v_2,\, v_3) \end{aligned}$$

תכונות של המכפלה החיצונית

1. פילוג:

$$\varphi \wedge (\omega_1 + \omega_2) = \varphi \wedge \omega_1 + \varphi \wedge \omega_2$$

2. קיבוץ:

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 = \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$$

3. אם φ מסדר k ו-ω מסדר ℓ אז

$$\varphi \wedge \omega = (-1)^{k \cdot \ell} \cdot \omega \wedge \varphi$$

משפט (ללא הוכחה)

לכל $I = (i_1,\, ...,\, i_k)$ סדרה עולה מתוך $\{1,\, ...,\, n\}$ מתקיים:

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

תבניות דיפרנציאליות

ראינו, שכדי לחשב שטח של משטח k-מימדי עם פרמטריזציה $\varphi:\ \ Q\to\mathbb{R}^{n}$ ($Q\subseteq\mathbb{R}^{k}$) השתמשנו באינטגרל:

$$\int_{Q}\sqrt{\det\left(J^{t}J\right)}dudv$$

שזה בעצם:

$$\int_{Q}\text{Area}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(u,\,v\right),\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(u,\,v\right)\right)dudv$$

(אינטגרל משטחי של f מסוג ראשון ביחס לשטח המשטח ב$\mathbb{R}^{2}$).
ואם רוצים לחשב אינטגרל של פונק' f המוגדרת על המשטח, האינטגרל יהיה:

$$\int_{Q}f\left(\varphi\left(u,\,v\right)\right)\cdot\text{Area}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(u,\,v\right),\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(u,\,v\right)\right)dudv$$

ראינו שתבניות מכלילות את הרעיון של השטח. כל תבנית מקבלת מס' מסוים של וקטורים ומחשבת איזשהו מספר בצורה המזכירה את התכונות של דטרמיננטה - שטח מכוון (עם תכונות ההתחלפות והמולטילינאריות). אלא שכדי שנוכל לחשב אינטגרל, השטח צריך להיות מחושב בכל פעם בנק' אחרת.
לכן, אנו צריכים להגדיר תבנית שפועלת לא על $\mathbb{R}^{n}$ אלא על המישור המשיק למשטח, בכל פעם בנק' אחת.
לשם כך נגדיר תבנית דיפרנציאלית או form field (differential form)

הגדרה (תבנית דיפרנציאלית)

תבנית דיפרנציאלית k-מימדי ב$\mathbb{R}^{n}$ $U\subseteq$ (U פתוחה) היא העתקה הנותנת לכל $x\in U$ פונק' מולטילינארית מתחלפת α_{x} ב$\mathbb{R}^{n}$.

$$\alpha:\ U\to A^{k}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$$

כיוון שראינו שכל k-תבנית ניתן להציג כצירוף לינארי של dx_{I}, הרי באותו אופן נוכל לכתוב את α_{x} לכל $x\in U$ כך:

$$\alpha_{x}=\sum_{I}\alpha_{I}\left(\overrightarrow{x}\right)dx_{I}$$

כאשר

$$\alpha_{I}\left(\overrightarrow{x}\right):\ \mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$$

נאמר כי התבנית α_{x} דיפרנציאבילית אם כל המקדמים $\alpha_{I}\left(\overrightarrow{x}\right)$ דיפרנציאביליים בU.
למשל, differential 2-form על $\mathbb{R}^{3}$ נראית כך:

$$\beta_{x}=a_{1,\,2}\left(x\right)dx_{\left(1,\,2\right)}+a_{1,\,3}\left(x\right)dx_{\left(1,\,3\right)}+a_{2,\,3}\left(x\right)dx_{\left(2,\,3\right)}$$

דוגמה

$\omega_{x}=x^{2}ydx\wedge dy$ היא תבנית דיפרנציאלית מסדר 2 על $\mathbb{R}^{2}$.
ברגע שאנו בוחרים $\overrightarrow{x}=\left(x,\,y\right)$ אנו מסתכלים על התבנית כאילו שהיא מוגדרת על וקטורים בתוך $\mathbb{R}_{\left(x,\,y\right)}^{2}$ שהוא המרחב $\mathbb{R}^{2}$ עם הראשית ב$\left(x,\,y\right)$.
למשל, בנק' $\overrightarrow{x}=\left(x,\,y\right)=\left(1,\,2\right)$, $\omega_{\overrightarrow{x}}$ היא פונק' מולטילינארית מתחלפת, הפועלת על וקטורים בתוך $\mathbb{R}_{\left(1,\,2\right)}^{2}$, וזוהי התבנית:

$$1^{2}\cdot2dx\wedge dy=2dx\wedge dy$$

אם נרצה לחשב את הערך של התבנית $2dx\wedge dy$ על הוקטורים $\left(4,\,0\right)_{\left(1,\,2\right)}$ ו$\left(3,\,1\right)_{\left(1,\,2\right)}$, ז"א:

$$\omega_{\left(1,\,2\right)}\left(\left(4,\,0\right),\,\left(3,\,1\right)\right)=2dx\wedge dy\left(\left(4,\,0\right),\,\left(3,\,1\right)\right)=2\cdot\begin{vmatrix}4 & 3\\0 & 1\end{vmatrix}=8$$

דוגמה נוספת

נתבונן ב1-form הדיפרנציאלי הבא:

$$\omega_{\overrightarrow{x}}=\frac{1}{2}\left(xdy-ydx\right)$$

לכל נק' $(x,\,y)\in\mathbb{R}^{2}$ זוהי תבנית הפועלת על וקטורים במרחב $\mathbb{R}_{(x,\,y)}^{2}$.
אם $\overrightarrow{h}=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$ הוא וקטור שראשיתו ב$(x,\,y)$ אז:

$$\omega_{(x,\,y)}\left(h\right)=\frac{1}{2}\left(x\cdot dy\left(h\right)-y\cdot dx\left(h\right)\right)=\frac{1}{2}\left(x\cdot s-y\cdot r\right)$$

זה למעשה שטח משולש שקדקדיו הם:

$$\left(0,\,0\right),\,\left(x,\,y\right),\,\left(x+r,\,y+s\right)$$

בהינתן עקומה ב$\mathbb{R}^{2}$, ניקח חלוקה של עקומה זו $(t_{0},\,...,\,t_{k})$. סכום שטחי המשולשים שקדקדיהם

$$\left(0,\,0\right),\,\left(\gamma\left(t_{i}\right),\,\gamma\left(t_{i+1}\right)\right),\,\left(\gamma\left(t_{i+1}\right),\,\gamma\left(t_{i+2}\right)\right)$$

שווה לשטח מתחת לעקומה.

האינטגרל של k-תבנית דיפרנציאלית - הגדרה

תהי $\gamma:\;U\to\mathbb{R}^{n}$ $(U\subseteq\mathbb{R}^{k})$ העתקה גזירה ברציפות.
תהי φ תבנית דיפרנציאלית מסדר k.
האינטגרל של φ לאורך γ הוא:

$$\int_{\gamma}\varphi=\int_{..}\int_{U}\varphi_{\gamma(\overrightarrow{u})}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial u_{1}},\,...,\,\frac{\partial\gamma}{\partial u_{k}}\right)\overrightarrow{du}$$

כאשר $\overrightarrow{u}=(u_{1},\,...,\,u_{k})\in U$.

דוגמה

נתבונן במסילה

$$\begin{array}{rcl}\gamma:\;[0,\,1] & \to & \mathbb{R}^{2}\\ \gamma\left(u\right) & = & \left(\cos u,\,\sin u\right)\end{array}$$

ונגדיר:

$$\varphi_{x,\,y}=-ydx+xdy$$

אז:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}\varphi & = \int_{0}^{1}\left(-ydx+xdy\right)_{(\cos u,\,\sin u)}\left(-\sin u,\,\cos u\right)du\\ & = \int_{0}^{1}-\sin u\cdot dx\left(-\sin u,\,\cos u\right)+\cos u\cdot dy\left(-\sin u,\,\cos u\right)du\\ & = \int_{0}^{1}\sin^{2}u+\cos^{2}udu=\int_{0}^{1}du=1\end{aligned}$$

למעשה חישבנו את האינטגרל המסילתי:

$$\int_{\gamma}\overrightarrow{f}\overrightarrow{dr}$$

כאשר

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{f}\left(x,\,y\right) & = & \left(-y,\,x\right)\\ \overrightarrow{r} & = & \left(dx,\,dy\right)\end{array}$$

דוגמה נוספת

ניקח $\gamma: U \to \mathbb{R}^3$ כאשר:

$$U=\left\{\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix} \mid \begin{matrix}0\le & s & \le 1\\ 0\le & t & \le 1\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{aligned}\gamma\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}s+t\\s^2\\t^2\end{pmatrix}\\ \varphi &= dx\wedge dy + ydx\wedge dz\end{aligned}$$

כעת:

$$\begin{aligned}\int_\gamma dx\wedge dy+ydx\wedge dz &= \int_0^1\int_0^1 (dx\wedge dy+ydx\wedge dz)_{\begin{pmatrix}s+t\\s^2\\t^2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&1\\2s&0\\0&2t\end{pmatrix}dsdt\\ &= \int_0^1\int_0^1 (dx\wedge dy)\begin{pmatrix}1&1\\2s&0\\0&2t\end{pmatrix}+s^2\cdot(dx\wedge dz)\begin{pmatrix}1&1\\2s&0\\0&2t\end{pmatrix}dsdt\\ &= \int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix}1&1\\2s&0\end{vmatrix}+s^2\begin{vmatrix}1&1\\0&2t\end{vmatrix}dsdt\\ &= \int_0^1\int_0^1 -2s+s^2\cdot 2t\,dsdt\\ &= \int_0^1 -2s+s^2\left[t^2\right]_0^1 ds\\ &= \int_0^1 -2s+s^2ds=\left[-s^2+\frac{s^3}{3}\right]_0^1=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

שימושים פיזיקליים

אינטגרל של diff 1-form היא עבודה של שדה כח (שדה וקטורי):

כל תבנית דיפרנציאלית מסדר 1 ב$\mathbb{R}^n$ חייבת להיות מהצורה:

$$\varphi_{\overrightarrow{x}}=f_1(x_1,..,x_n)dx_1+...+f_n(x_1,...,x_n)dx_n$$

כאשר $f_i:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאביליות.

אם נסתכל על f_i כרכיבים של פונק' וקטורית (או שדה וקטורי) $F:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ נקבל שלכל $F=(f_1,...,f_n)$ מתאימה תבנית דיפרנציאלית מסדר 1, $\varphi_{\overrightarrow{x}}$ הנ"ל.

אם נסמן $v=\begin{pmatrix}dx_1\\ \vdots\\ dx_n\end{pmatrix}$ אז התבנית היא $W_{\overrightarrow{F}}=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{r}$.

נוכל לחשוב על $\overrightarrow{F}$ כעל שדה כח, שנותן לכל נק' במרחב וקטור כח, שמופעל באותה נק'.

אם מחשבים את האינטגרל של $W_{\overrightarrow{F}}$ לאורך מסילה γ ב$\mathbb{R}^n$, מקבלים את העבודה של F לאורך γ.

למשל, ב$\mathbb{R}^2$ נוכל לקחת את התבנית:

$$W_{\overrightarrow{F}}=xdx+ydy$$

כאן

$$\overrightarrow{F}(x,y)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

נשתמש בתבנית זו בהמשך.
למעשה מתקבל אינטגרל <u>מסילתי</u> של F לאורך Γ $\gamma:\ [a,\, b]\to\Gamma$, לפי הגדרת האינטגרל:

$$\begin{aligned}\int_\gamma W_{\overrightarrow{F}} &= \int_a^b \left(W_{\overrightarrow{F}}\right)_{\gamma(t)}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)dt\\ &= \int_a^b\left(\overrightarrow{F}\left(\gamma\left(t\right)\right)\cdot\begin{pmatrix}dx_1\\ \vdots\\ dx_n\end{pmatrix}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)dt\\ &= \int_a^b\left(f_1\left(\gamma\left(t\right)\right)dx_1+...+f_n\left(\gamma\left(t\right)\right)dx_n\right)\left(\overrightarrow{\gamma^{'}\left(t\right)}\right)dt\\ &= \int_a^b\left[f_1\left(\gamma\left(t\right)\right)\cdot\gamma_1^{'}\left(t\right)+f_2\left(\gamma\left(t\right)\right)\cdot\gamma_2^{'}\left(t\right)+...+f_n\left(\gamma\left(t\right)\right)\gamma_n^{'}\left(t\right)\right]dt\\ &= \int_a^b\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\gamma}\left(t\right)\right)\cdot\overrightarrow{\gamma}^{'}\left(t\right)dt\end{aligned}$$

וזה אינטגרל מסילתי מסוג 2 של $\overrightarrow{f}$ לאורך γ.

דוגמה נוספת

אם

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}y\\ -x\\ 0\end{pmatrix}\\ \gamma\left(t\right) &= \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\end{pmatrix}\\ t &\in [0,\, 4\pi]\end{aligned}$$

אז העבודה היא:

$$\begin{aligned}\int_\gamma W_{\overrightarrow{F}} &= \int_0^{4\pi}\left(f_1\left(\gamma\left(t\right)\right)dx+f_2\left(\gamma\left(t\right)\right)dy+f_3\left(\gamma\left(t\right)\right)dz\right)\gamma^{'}\left(t\right)dt\\ &= \int_0^{4\pi}\left(-\sin^2 t-\cos^2 t\right)dt=-4\pi\end{aligned}$$

משמעות התבנית

מה המשמעות של התבנית $W_{\overrightarrow{F}}$ עצמה (מעבר לכך שזה אינטגרנד, הנותן עבודה של $\overrightarrow{F}$ לאחר האינטגרציה)?
לצורך ההבנה נתבונן שוב בדוגמה ב-$\mathbb{R}^2$:

$$\varphi_{\overrightarrow{x}}=xdx+ydy$$

כאשר מפעילים את $\varphi_{\overrightarrow{x}}$ צריך לבחור תחילה נקודה $\overrightarrow{x}=(x,\, y)$ ואח"כ וקטור משיק, הנמצא במרחב המשיק בנק' $(x,\, y)$.

התבנית למעשה <u>מודדת</u> את העבודה, הנעשית ע"י הכח $\overrightarrow{F}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ לאורך הוקטור המשיק. (הפעולה בנק' $(x,\, y)$ והוקטור המשיק יוצא מ-$(x,\, y)$).

דוגמה

נחשב את התבנית בנק' $(x,\, y)=(1,\, -1)$.
לבחירת וקטור משיק יש לנו את כל $\mathbb{R}^2_{(1,\, -1)}$ שהוא הזזה של $\mathbb{R}^2$ כך שהראשית ב-$(1,\, -1)$.
נניח שהוקטור המשיק הוא $(10,\, 10)$. מהי העבודה בנק' $(1,\, -1)$ על $(10,\, 10)$?

$$\varphi_{(1,\, -1)}\left(10,\, 10\right)=\left(1dx-1dy\right)\left(10,\, 10\right)=10-10=0$$