צורת ג'ורדן של מטריצה: הסיפור המלא

בועז צבאן

7 בפברואר 2011

1 מבוא

מטרתנו היא להוכיח, בצורה מלאה וברמת פירוט המתאימה לקורס שנה א' באלגברה לינארית, את המשפט הבא.

משפט 1.1 (משפט ג'ורדן)

1. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים. אזי יש $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה, כך ש $P^{-1}AP$ היא סכום ישר של בלוקי ג'ורדן $J_m(\lambda)$.
2. יהי $T : V \to V$ אופרטור כך שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים. אזי T ניתן להצגה כסכום ישר של בלוקי ג'ורדן $J_m(\lambda)$.

יתר על כן, הצגות המטריצה או האופרטור כסכום ישר של בלוקי ג'ורדן הן יחידות, עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

הגדרה 1.2 הצגה של מטריצה/אופרטור כסכום ישר של בלוקי ג'ורדן תיקרא צורת ג'ורדן של המטריצה/אופרטור.

הערה 1.3 משפטים רבים בקורס נובעים מיידית ממשפט ג'ורדן. למשל:

1. כל מטריצה שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינארים ניתנת לשילוש.
2. משפט קיילי־המילטון (כאשר הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים ־ דבר שאפשר להבטיח על ידי הרחבת שדות, שתלמדו בקורס אחר).
3. הפולינום המינימלי מחלק את האופייני והאופייני מחלק חזקת המינימלי (כאשר הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים).

בהוכחת משפט ג'ורדן, נשתמש בחלק ממשפטים אלה. לכן, אין לראות בזה הוכחה חדשה של המשפטים הקודמים, אלא יותר המחשה כמה משפט ג'ורדן מסכם יפה דברים רבים שלמדנו, ותורם להבנת המבנה של מטריצות ותכונותיהן.

ראשית נסביר, מדוע היחידות של צורת ג'ורדן היא רק עד כדי סדר הבלוקים.

הגדרה 1.4 יהיו $T : V \to V$ אופרטור, $U \subseteq V$ תת־מרחב אינוריאנטי תחת T, ו E בסיס של U. אזי $T|_U : U \to U$ אופרטור, וניתן להציג אותו $[T|_U]_E$. נסמן הצגה זו בקצרה: $[T]_E$. במלים אחרות, עבור קבוצה בת"ל $E \subseteq V$ שאינה דווקא בסיס, כך ש $\operatorname{span} E$ אינוריאנטי תחת T, $[T]_E$ יסמן את המטריצה $[T|_{\operatorname{span} E}]_E$.

הגדרה 1.5 עבור $v \in \mathbb{F}^k, u \in \mathbb{F}^l$ נסמן ב $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k+l}$ את הוקטור ש k רכיביו הראשונים הם רכיבי v, והרכיבים הנותרים הם רכיבי u (שירשור שני הוקטורים). באופן דומה, נגדיר שירשור מספר כלשהו של וקטורים.

לחלק מהטענות שנוכיח ניתן שמות, שיקלו עלינו להזכר בהם בעת הצורך.

למה 1.6 (הצגה האלכסונית־בלוקים) יהי $T : V \to V$ אופרטור.

1. יהיו $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינווריאנטים תחת T, ולכל $i = 1, \ldots, k$, יהי B_i בסיס של U_i. נסמן $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$. אזי:

$$[T]_B = [T]_{B_1} \oplus [T]_{B_2} \oplus \cdots \oplus [T]_{B_k} = \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & O & \cdots & O \\ O & [T]_{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & [T]_{B_k} \end{pmatrix}.$$

2. מצד שני, אם $[T]_B = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$ סכום ישר של מטריצות ריבועיות, אז יש פירוק של Bלאיחוד זר, $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ כך שלכל $i = 1, \ldots, k$, התת־מרחב $U_i = \operatorname{span} B_i$ הוא אינוריאנטי תחת T, ו $[T]_{B_i} = A_i$.

הוכחה: באינדוקציה על k.

(1) עבור $k = 1$ אין מה להוכיח.

המקרה $k = 2$: יהיו $V = U_1 \oplus U_2$, כאשר U_1, U_2 אינוריאנטים תחת T, B_1, B_2 בסיסים של U_1, U_2 בהתאמה, $B = B_1 \cup B_2$.
לכל $v \in B_1$, כיון ש $B_1 \subseteq U_1$ ו U_1 אינוריאנטי תחת T, $T(v) \in U_1$ ולכל ניתן להציגו כצירוף לינארי של אברי B_1. לכן,
$[Tv]_B = \begin{pmatrix} [Tv]_{B_1} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$.

בדומה, לכל $u \in B_2$ מתקיים $[Tu]_B = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ [Tu]_{B_2} \end{pmatrix}$.

יהיו $B_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}, B_2 = \{u_1, \ldots, u_d\}$. אזי

$$\begin{aligned}
[T]_B &= ([Tv_1]_B, \ldots, [Tv_r]_B, [Tu_1]_B, \ldots, [Tu_d]_B) = \\
&= \begin{pmatrix} [Tv_1]_{B_1} & \ldots, & [Tv_r]_{B_1} & \vec{0} & \ldots, & \vec{0} \\ \vec{0} & & \vec{0} & [Tu_1]_{B_2} & & [Tu_d]_{B_2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & O \\ O & [T]_{B_2} \end{pmatrix} = [T]_{B_1} \oplus [T]_{B_2} .
\end{aligned}$$

כעת נניח את נכונות הטענה (1) עבור פחות מ k מחוברים, ונוכיחה עבור k מחוברים. מהנתון, $V = (U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_{k-1}) \oplus U_k$ סכום ישר של שני תת־מרחבים אינטריאנטים, ו $B = (B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}) \cup B_k$ איחוד זר של בסיסים של שני מרחבים אלה.
מהמקרה $k = 2$, נקבל ש

$$[T]_B = [T]_{B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}} \oplus [T]_{B_k} .$$

מהנחת האינדוקציה עבור $k - 1$, $[T]_{B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}} = [T]_{B_1} \oplus \cdots \oplus [T]_{B_{k-1}}$, ולכן

$$[T]_B = [T]_{B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}} \oplus [T]_{B_k} = [T]_{B_1} \oplus \cdots \oplus [T]_{B_{k-1}} \oplus [T]_{B_k} .$$

(2) גם כאן הטענה נובעת, באינדוקציה, מהמקרה $k = 2$. נוכיח איפוא מקרה זה.
יהי $[T]_B = A_1 \oplus A_2$ סכום ישר של מטריצות ריבועיות, נניח $A_1 \in \mathbb{F}^{r \times r}, A_2 \in \mathbb{F}^{d \times d}$. יהי $B = \{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_d\}$.
נסמן $B_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}, B_2 = \{u_1, \ldots, u_d\}$, ו $U_i = \operatorname{span} B_i$($i = 1, 2$).

$$\begin{aligned}
([Tv_1]_B, \ldots, [Tv_r]_B, [Tu_1]_B, \ldots, [Tu_d]_B) &= [T]_B = A_1 \oplus A_2 = \\
&= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 e_1 & \ldots, & A_1 e_r & \vec{0} & \ldots, & \vec{0} \\ \vec{0} & & \vec{0} & A_2 e_1 & & A_2 e_d \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

לכן, לכל $i = 1, \ldots, r$, $[Tv_i]_B = \begin{pmatrix} A_1 e_i \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ ובפרט Tv_i צירוף לינארי של $v_1, \ldots, v_r$ (בלבד), ולכן שייך ל $U_1 = \operatorname{span} B_1$.
לכן, $T[U_1] = \operatorname{span} T[B_1] \subseteq U_1$, כלומר U_1 הוא אינוריאנטי תחת T. יתר על כן, כיון שTv_i צירוף לינארי של $v_1, \ldots, v_r$ בלבד, $A_1 e_i = [Tv_i]_B = [Tv_i]_{B_1}$, ולכן

$$[T]_{B_1} = \left([Tv_1]_{B_1}, \ldots [Tv_r]_{B_1}\right) = (A_1 e_1, \ldots, A_1 e_r) = A_1 .$$

באותו אופן (בדוק!), U_2 אינוריאנטי תחת T ומתקיים $[T]_{B_2} = A_2$. ■

מסקנה 1.7 אם $[T]_B = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$ סכום ישר של מטריצות ריבועיות, אז לכל $\sigma \in S_k$, יש בסיס B' (המתקבל מ B על ידי שינוי סדר איבריו), כך ש $[T]_{B'} = A_{\sigma(1)} \oplus A_{\sigma(2)} \oplus \cdots \oplus A_{\sigma(k)}$.

הוכחה: מהחלק השני של הלמה הקודמת, יש פירוק של B לאיחוד זר, $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ כך שלכל $i = 1, \ldots, k$, התת־מרחב $U_i = \operatorname{span} B_i$ הוא אינוריאנטי תחת T, ו $[T]_{B_i} = A_i$. נסדר את אברי B בצורה אחרת: $B = B_{\sigma(1)} \cup B_{\sigma(2)} \cup \cdots \cup B_{\sigma(k)}$.
אז מהחלק הראשון של הלמה,

$$[T]_B = [T]_{B_{\sigma(1)}} \oplus [T]_{B_{\sigma(2)}} \oplus \cdots \oplus [T]_{B_{\sigma(k)}} = A_{\sigma(1)} \oplus A_{\sigma(2)} \oplus \cdots \oplus A_{\sigma(k)}.$$

■

מסקנה 1.8 יהי $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$ סכום ישר של מטריצות ריבועיות. לכל $\sigma \in S_k$, $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$ דומה למטריצה $A_{\sigma(1)} \oplus A_{\sigma(2)} \oplus \cdots \oplus A_{\sigma(k)}$. כלומר, החלפת סדר הבלוקים באלכסון נותנת מטריצה דומה.

הוכחה: כל מטריצה היא הצגה של אופרטור. לכן אפשר להשתמש במסקנה הקודמת. ■

2 משפט ג'ורדן הנילפוטנטי

בסעיף זה, נוכיח שלכל אופרטור נילפוטנטי יש צורת ג'ורדן.

למה 2.1 (הפולינום האופייני של אופרטור נילפוטנטי) יהי $T : V \to V$ אופרטור נילפוטנטי. אזי הפולינום האופייני של T הוא חזקה של x (כלומר, $p_T(x) = x^n$, כאשר $n = \dim V$).
בפרט, 0 הוא הערך העצמי היחיד של T.

הוכחה: $T^n = O$, לכן $m_T(x) \mid x^n$. כיון שכל גורם אי־פריק של $p_T(x)$ מופיע ב $m_T(x)$ ומעלת $p_T(x)$ היא n, $p_T(x) = x^n$. ■

אם בלוק $J_m(\lambda)$ מופיע בצורת ג'ורדן של אופרטור, אז λ מופיע בין אברי האלכסון של צורת ג'ורדן זו, וכיון שמטריצה זו משולשית עליונה, λ ערך עצמי שלה, ולכן גם של האופרטור. לכן, אם יש לאופרטור נילפוטנטי צורת ג'ורדן, אז כל הבלוקים בצורה הזו הם מהסוג $J_m(0)$. לסיכום: המטרה שלנו היא להוכיח שלכל אופרטור נילפוטנטי יש הצגה שהיא סכום ישר של בלוקים מהסוג $J_m(0)$.

ממשפטון ההצגה האלכסונית בלוקים, מה ששקול לעשות זה למצוא בסיס מהצורה $B = E_1 \cup \cdots \cup E_k$, כך שכל E_i פורש תת־מרחב אינריאנטי, ולכל i, $[T]_{E_i} = J_{m_i}(0)$ (עבור $m_i = \#E_i$). ראשית נבדוק מתי קורה ש $[T]_E = J_m(0)$.

למה 2.2 יהיו $T : V \to V$ אופרטור, E בסיס של V. $[T]_E = J_n(0) \iff E = \left\{T^{n-1}v, \ldots, T^2v, Tv, v\right\}$, כאשר $T^nv = \vec{0}$.

הוכחה: ($\Leftarrow$) יהי $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$. מהנתון,

$$\left([Tv_1]_E, [Tv_2]_E, \ldots, [Tv_n]_E\right) = [T]_E = J_n(0) = \left(\vec{0}, e_1, \ldots, e_{n-1}\right)$$

לכל $1 < i$, $[Tv_i]_E = e_{i-1} = [v_{i-1}]_E$, ולכן $Tv_i = v_{i-1}$. כמו כן, $[Tv_1]_E = \vec{0}$ ולכן $Tv_1 = \vec{0}$. נסמן $v = v_n$. אזי

$$v_{n-1} = Tv_n = Tv,\ v_{n-2} = Tv_{n-1} = T^2v,\ \ldots,\ v_1 = Tv_2 = T^{n-1}v$$

וכן $T^nv = Tv_1 = \vec{0}$.

($\Rightarrow$) מהנתון,

$$\begin{aligned}
[T]_E &= \left(\left[T(T^{n-1}v)\right]_E, \left[T(T^{n-2}v)\right]_E, \ldots, [T(v)]_E\right) = \\
&= \left([T^nv]_E, \left[T^{n-1}v\right]_E, \ldots, [Tv]_E\right) = \left(\vec{0}, e_1, \ldots, e_{n-1}\right) = J_n(0).
\end{aligned}$$

אפשר לחשוב על $T^{n-1}v, \ldots, T^2v, Tv, v$ כמסלול שמתחיל ב v, ובכל פעם מתקדם ל T של מה שהיה קודם, ועוצר בדיוק לפני שמגיעים ל $\vec{0}$. מכאן השם "מסלול".

■

הגדרה 2.3 קבוצה (לאו דווקא פורשת) מהצורה $E = \left\{T^{m-1}v, \ldots, T^2v, Tv, v\right\}$, כאשר $T^{m-1}v \neq \vec{0}$ ו $T^mv = \vec{0}$, תיקרא מסלול מאורך m.

למה 2.4 כל מסלול הוא קבוצה בת"ל.

הוכחה: נניח ש $\alpha_0v + \alpha_1Tv + \cdots + \alpha_{m-1}T^{m-1}v = \vec{0}$. נפעיל T^{m-1} על שני האגפים, לקבל

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= T^{m-1}\left(\vec{0}\right) = T^{m-1}\left(\alpha_0v + \alpha_1Tv + \cdots + \alpha_{m-1}T^{m-1}v\right) = \\
&= \alpha_0T^{m-1}v + \alpha_1T^mv + \alpha_2T^{m+1}v + \cdots + \alpha_{m-1}T^{2m-2}v = \\
&= \alpha_0T^{m-1}v + \vec{0} + \vec{0} + \cdots + \vec{0} = \alpha_0T^{m-1}v
\end{aligned}$$

ולכן $\alpha_0 = 0$. לכן, $\alpha_1Tv + \cdots + \alpha_{m-1}T^{m-1}v = \alpha_0v + \alpha_1Tv + \cdots + \alpha_{m-1}T^{m-1}v = \vec{0}$. נפעיל איפוא T^{m-2} על שני האגפים, לקבל

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= T^{m-2}\left(\vec{0}\right) = T^{m-2}\left(\alpha_1Tv + \cdots + \alpha_{m-1}T^{m-1}v\right) = \\
&= \alpha_1T^{m-1}v + \alpha_2T^mv + \cdots + \alpha_{m-1}T^{2m-3}v = \\
&= \alpha_1T^{m-1}v + \vec{0} + \cdots + \vec{0} = \alpha_1T^{m-1}v
\end{aligned}$$

ולכן $\alpha_1 = 0$. לכן, $\vec{0} = \alpha_1 Tv + \alpha_2 T^2 v + \cdots + \alpha_{m-1} T^{m-1} v = \alpha_2 T^2 v + \cdots + \alpha_{m-1} T^{m-1} v$. אם נפעיל כעת T^{m-3} על שני האגפים, נקבל ש $\alpha_2 = 0$, וכו'.

לכן, כל המקדמים הם 0. ■

תזכורת: לכל $v_1, \ldots, v_k \in V$:

$$T\left[\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}\right] = \operatorname{span}\{Tv_1, \ldots, Tv_k\} = \operatorname{span}\left(T\left[\{v_1, \ldots, v_k\}\right]\right).$$

בפרט, $T\left[\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}\right]$ תת־מרחב של V.

למה 2.5 אם E מסלול, אז תת־המרחב $\operatorname{span} E$ הוא אינוריאנטי תחת T. **הוכחה:** תהי $E = \left\{T^{m-1}v, \ldots, T^2 v, Tv, v\right\}$ בת"ל, כאשר $T^m v = \vec{0}$. לכל $T^i v \in E$ ($i = 0, \ldots, m-2$), $T(T^i v) = T^{i+1} v \in E \subseteq \operatorname{span} E$. גם עבור $i = m-1$, $T(T^{m-1}v) = T^m v = \vec{0} \in \operatorname{span} E$. לכן, $T[\operatorname{span} E] = \operatorname{span}(T[E]) \subseteq \operatorname{span} E$. ■

לכן, לכל מסלול E $T|_{\operatorname{span} E} : \operatorname{span} E \to \operatorname{span} E$ אופרטור, ו $[T]_E = \left[T|_{\operatorname{span} E}\right]_E$ מוגדר.

מסקנה 2.6 $[T]_E = J_m(0)$ אם ורק אם E מסלול.

הגדרה 2.7 בסיס שההצגה של T לפיו היא צורת ג'ורדן ייקרא בסיס מג'רדן של T.

מסקנה 2.8 **(המבנה של בסיס מג'רדן)** יהי T אופרטור נילפוטנטי.
$[T]_B$ הוא בצורת ג'ורדן (כלומר, B הוא בסיס מג'רדן של T) $\iff$ $B = E_1 \cup \cdots \cup E_k$ איחוד של מסלולים זרים.
יתר על כן: לכל m, מספר הבלוקים $J_m(0)$ ב $[T]_B$ שווה למספר המסלולים E_i ב B שאורכם m.
בפרט, צורת ג'ורדן נקבעת באופן יחיד על ידי מספרי המסלולים ב B מכל אורך.

בסיס מג'רדן נראה, איפוא, כך: יש וקטורים $v_1, \ldots, v_{r_k} \in V$ כך שהוקטורים

$$\underbrace{T^{k-1}v_1, \ldots, T^{k-1}v_{r_1}}, \underbrace{T^{k-2}v_{r_1+1}, \ldots, T^{k-2}v_{r_2}}, \ldots, \underbrace{Tv_{r_{k-2}+1}, \ldots, Tv_{r_{k-1}}}, \underbrace{v_{r_{k-1}+1}, \ldots, v_{r_k}}$$

שייכים כולם ל $\ker T$, וכך שהבסיס הוא איחוד המסלולים שמסתיימים בהם

$$\underbrace{\begin{matrix} v_1 & \ldots & v_{r_1} \\ Tv_1 & \ldots & Tv_{r_1} \\ \vdots & & \vdots \\ T^{k-1}v_1 & \ldots & T^{k-1}v_{r_1} \end{matrix}} \quad \underbrace{\begin{matrix} v_{r_1+1} & \ldots & v_{r_2} \\ \vdots & & \vdots \\ T^{k-2}v_{r_1+1} & \ldots & T^{k-2}v_{r_2} \end{matrix}} \quad \ldots \quad \underbrace{\begin{matrix} v_{r_{k-2}+1} & \ldots & v_{r_{k-1}} \\ Tv_{r_{k-2}+1} & \ldots & Tv_{r_{k-1}} \end{matrix}} \quad \underbrace{\begin{matrix} v_{r_{k-1}+1} & \ldots & v_{r_k} \end{matrix}}$$

(בסידרה זו יש $r_1 + r_2 + \cdots + r_k$ וקטורים). יהי B בסיס כזה. אם נסמן $r_0 = 0$, אז:

$$B = \left\{T^i v_j \;:\; \forall d = 1, \ldots, k :\; j = r_{d-1}+1, \ldots, r_d;\; i = 0, \ldots, k-d\right\}$$

נסדר את B כך שקודם קוראים את העמודה הראשונה משמאל אחריה את העמודה השניה משמאל, וכן הלאה, כאשר כל עמודה נקראת מלמטה למעלה. אזי $[T]_B$ היא סכום ישר של בלוקי ג'ורדן מהצורה $J_m(0)$. בפירוט:

$$[T]_B = \underbrace{J_k(0) \oplus \cdots \oplus J_k(0)}_{r_1} \oplus \underbrace{J_{k-1}(0) \oplus \cdots \oplus J_{k-1}(0)}_{r_2 - r_1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{J_2(0) \oplus \cdots \oplus J_2(0)}_{r_{k-1} - r_{k-2}} \oplus \underbrace{J_1(0) \oplus \cdots \oplus J_1(0)}_{r_k - r_{k-1}}.$$

משפט 2.9 **(משפט ג'ורדן הנילפוטנטי - קיום)** יהי $T : V \to V$ אופרטור נילפוטנטי מסדר k. אזי יש בסיס מג'רדן של T (ולכן יש ל T צורת ג'ורדן).

הוכחה: נשים לב ש $\operatorname{im} T^{k-1} \subseteq \ker T$, ולכן

$$\operatorname{im} T^{k-1} \subseteq \ker T \cap \operatorname{im} T^{k-2} \subseteq \ker T \cap \operatorname{im} T^{k-3} \subseteq \ldots \subseteq \ker T \cap \operatorname{im} T \subseteq \ker T.$$

ניקח בסיס $T^{k-1}v_1, \ldots, T^{k-1}v_{r_1}$ של $\operatorname{im} T^{k-1}$.

נשלים אותו לבסיס של $\ker T \cap \operatorname{im} T^{k-2}$, על ידי הוספת וקטורים $T^{k-2}v_{r_1+1}, \ldots, T^{k-2}v_{r_2}$.

נשלים את מה שהתקבל לבסיס של $\ker T \cap \operatorname{im} T^{k-3}$, על ידי הוספת וקטורים $T^{k-3}v_{r_2+1}, \dots, T^{k-3}v_{r_3}$.

נמשיך באותו אופן, עד שנקבל בסיס

$$\underbrace{T^{k-1}v_1, \dots, T^{k-1}v_{r_1}}_{1}, \underbrace{T^{k-2}v_{r_1+1}, \dots, T^{k-2}v_{r_2}}_{2}, \dots, \underbrace{Tv_{r_{k-2}+1}, \dots, Tv_{r_{k-1}}}_{k-1}, \underbrace{v_{r_{k-1}+1}, \dots, v_{r_k}}_{k}$$

של $\ker T$. נוכיח שאיחוד המסלולים

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{matrix} v_1 & \dots & v_{r_1} \\ Tv_1 & \dots & Tv_{r_1} \\ \vdots & & \vdots \\ T^{k-1}v_1 & \dots & T^{k-1}v_{r_1} \end{matrix}}_{1} \quad \underbrace{\begin{matrix} v_{r_1+1} & \dots & v_{r_2} \\ \vdots & & \vdots \\ T^{k-2}v_{r_1+1} & \dots & T^{k-2}v_{r_2} \end{matrix}}_{2} \quad \dots \quad \underbrace{\begin{matrix} v_{r_{k-2}+1} & \dots & v_{r_{k-1}} \\ Tv_{r_{k-2}+1} & \dots & Tv_{r_{k-1}} \end{matrix}}_{k-1} \quad \underbrace{\begin{matrix} v_{r_{k-1}+1} & \dots & v_{r_k} \end{matrix}}_{k} \right\}$$

מהווה בסיס של V.

אי־תלות לינארית: נבחן בצירוף לינארי כללי שמתאפס:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{d=1}^{i}\sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d} \alpha_{ij}T^{i-d}v_j = \vec{0}.$$

אם נפעיל T^{k-1}, כמעט כל הוקטורים יתאפסו (כיון שהוקטורים בשורה התחתונה של מטריצת הוקטורים הנ"ל כולם ב $\ker T$), ונקבל $\sum_{j=1}^{r_1} \alpha_{1j}T^{k-1}v_j = \vec{0}$. כיון ש $T^{k-1}v_1 \dots T^{k-1}v_{r_1}$ בת"ל (אברי השורה האחרונה במטריצת הוקטורים הם בסיס של $\ker T$), $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \dots = \alpha_{1r_1} = 0$, כלומר מקדמי השורה הראשונה מתאפסים. לכן,

$$\sum_{i=2}^{k}\sum_{d=1}^{i}\sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d} \alpha_{ij}T^{i-d}v_j = \sum_{i=1}^{k}\sum_{d=1}^{i}\sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d} \alpha_{ij}T^{i-d}v_j = \vec{0}.$$

כעת, אם נפעיל את T^{k-2} על אגף שמאל, כמעט כל הוקטורים יתאפסו ונקבל

$$\sum_{d=1}^{2}\sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d} \alpha_{2j}T^{k-d}v_j = \vec{0}$$

וכיון שזה צירוף לינארי של וקטורים בת"ל, נקבל ש $\alpha_{21} = \dots = \alpha_{2,r_2} = 0$, כלומר מקדמי השורה השניה מתאפסים. נמשיך באותו אופן, להראות שלכל $i = 1, \dots, k$, מקדמי שורה i הם 0, כלומר כל המקדמים הם 0.

פרישה: לכל $m = 0, \dots, k-1$, הבסיס שבחרנו עבור $\ker T \cap \operatorname{im} T^m$ מוכל ב $T^m[B]$ (התבונן ב B) ובפרט ב $T^m[\operatorname{span} B]$, שהוא תת־מרחב. לכן,

$$\ker T \cap \operatorname{im} T^m \subseteq T^m[\operatorname{span} B].$$

יהי $v \in V$. אז $T^{k-1}v \in \operatorname{im} T^{k-1} \subseteq T^{k-1}[\operatorname{span} B]$.

טענה: לכל $m = 1, \dots, k-1$, אם $T^m v \in T^m[\operatorname{span} B]$, אז $T^{m-1}v \in T^{m-1}[\operatorname{span} B]$.

הוכחת הטענה: יהי $u \in \operatorname{span} B$ כך ש $T^m v = T^m u$, אז

$$T(T^{m-1}v - T^{m-1}u) = T^m v - T^m u = \vec{0}$$

לכן $T^{m-1}v - T^{m-1}u \in \ker T \cap \operatorname{im} T^{m-1} \subseteq T^{m-1}[\operatorname{span} B]$. כיון ש $T^{m-1}u \in T^{m-1}[\operatorname{span} B]$, גם $T^{m-1}v \in T^{m-1}[\operatorname{span} B]$. $\square$

לכן, כיון ש$T^{k-1}v \in T^{k-1}[\operatorname{span} B]$, נקבל ש $T^{k-2}v \in T^{k-2}[\operatorname{span} B]$, ומזה נקבל ש $T^{k-3}v \in T^{k-3}[\operatorname{span} B]$, וכו', ולבסוף נקבל ש $v = T^0 v \in T^0[\operatorname{span} B] = \operatorname{span} B$. $\blacksquare$

למה 2.10 יהי $E = \{T^{m-1}v, \dots, T^2v, Tv, v\}$ מסלול מאורך m, ונסמן $V_0 := \operatorname{span} E$, $T_0 := T|_{\operatorname{span} E}$. אזי

$$\dim\left(\ker T_0 \cap \operatorname{im} T_0^j\right) = \begin{cases} 0 & j \geq m \\ 1 & j < m \end{cases}.$$

הוכחה: יהי $m \leq j$. אז $T^j\left[E_0\right]=\left\{\vec{0}\right\}$ (כיון ש $T^m v=\vec{0}$), ולכן $\operatorname{im} T_0^j=T^j\left[V_0\right]=\left\{\vec{0}\right\}$ (כיון ש $V_0=\operatorname{span} E$). בפרט, $\dim\left(\ker T_0 \cap \operatorname{im} T_0^j\right)=0$.
יהי $j<m$. כיון ש $Tv, T^2 v, \ldots T^{m-1} v \in \operatorname{im} T_0$ והם בת"ל, $\dim \operatorname{im} T_0 \geq m-1$. לכן,

$$\dim \ker T_0+(m-1) \leq \dim \ker T_0+\dim \operatorname{im} T_0=\dim V_0=m .$$

לכן, $\dim \ker T_0 \leq 1$, ובפרט $\dim\left(\ker T_0 \cap \operatorname{im} T_0^j\right) \leq 1$. מצד שני, $\vec{0} \neq T^{m-1} v \in \ker T_0 \cap \operatorname{im} T_0^j$, לכן המימד הוא גם $1 \leq$. ■

משפט 2.11 (משפט ג'ורדן הנילפוטנטי - יחידות) יהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור נילפוטנטי מסדר k, ויהי B בסיס מג'רדן של T. אזי מספר המסלולים מכל אורך ב B (ולכן גם מספר הבלוקים מכל גודל ב $[T]_B$) נקבע באופן יחיד על ידי T. בפירוט:

1. המסלול הארוך ביותר ב B הוא מאורך k.
2. לכל $m=1, \ldots, k$, מספר המסלולים שאורכם גדול מ m הוא $\dim\left(\ker T \cap \operatorname{im} T^m\right)$.
(לכן מספר המסלולים מאורך m בדיוק הוא $\dim\left(\ker T \cap \operatorname{im} T^{m-1}\right)-\dim\left(\ker T \cap \operatorname{im} T^m\right)$.)

הוכחה: (1) נניח שכל המסלולים הם מאורך קטן מ k. אז $T^{k-1} v=\vec{0}$ לכל $v \in B$, ולכן לכל $v \in V$, כלומר $T^{k-1}=O$, בסתירה לנתון.
מצד שני, כיון ש $T^k=O$, אין מסלול באורך $k+1$ או יותר (אחרת, וקטור האפס היה שייך למסלול, בסתירה להגדרת מסלול).

(2) יהיו $E_1, \ldots, E_r$ המסלולים ב B, ונסמן $V_i=\operatorname{span} E_i$, $T_i=\left.T\right|_{V_i}$. כיון ש $V=V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ פירוק לסכום ישר של תת־מרחבים אינוריאנטים, לכל m מתקיים

$$\begin{aligned} \operatorname{im} T^m & =\operatorname{im} T_0^m \oplus \cdots \oplus \operatorname{im} T_r^m \\ \ker T & =\ker T_0 \oplus \cdots \oplus \ker T_r \end{aligned}$$

לכן,

$$\ker T \cap \operatorname{im} T^m=\left(\ker T_0 \cap \operatorname{im} T_0^m\right) \oplus \cdots \oplus\left(\ker T_r \cap \operatorname{im} T_r^m\right)$$

ולכן

$$\dim\left(\ker T \cap \operatorname{im} T^m\right)=\dim\left(\ker T_0 \cap \operatorname{im} T_0^m\right)+\cdots+\dim\left(\ker T_r \cap \operatorname{im} T_r^m\right)$$

מהלמה הקודמת, המחוברים בסכום מימין הם 0 כאשר אורך המסלול קטן או שווה ל m, ואחרת 1. לכן, סכומם שווה למספר המסלולים שאורכם גדול מ m. ■

אופרטור נילפוטנטי הוא דוגמא למטריצה עם ערך עצמי יחיד:

משפט 2.12 (משפט ג'ורדן עבור מטריצה עם ערך עצמי אחד) יהי $T: V \rightarrow V$ כך שהפולינום האופייני של T הוא חזקה של $x-\lambda$.
(במלים אחרות, $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינארים, ויש ל T ערך עצמי יחיד λ.)
אזי יש ל T הצגה כסכום ישר של בלוקי ג'ורדן $J_m(\lambda)$. הצגה זו יחידה עד כדי סדר המחוברים.

הוכחה: **קיום:** האופרטור $T-\lambda I$ הוא נילפוטנטי: $(T-\lambda I)^n=p_T(T)=O$, ממשפט קיילי־המילטון.
ממשפט ג'ורדן הנילפוטנטי (2.9), יש בסיס B של V כך ש $[T-\lambda I]_B=J_{m_1}(0) \oplus \cdots \oplus J_{m_k}(0)$ סכום ישר של בלוקי ג'ורדן $J_m(0)$.
כיון ש $[T-\lambda I]_B=[T]_B-\lambda I$,

$$[T]_B=\left(J_{m_1}(0) \oplus \cdots \oplus J_{m_k}(0)\right)+\lambda I=J_{m_1}(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_{m_k}(\lambda) .$$

יחידות: אילו ל $[T]_B$ היתה הצגה אחרת כזו, אז היינו מקבלים הצגה אחרת לאופרטור הנילפוטנטי $T-\lambda I$, בסתירה ליחידות במשפט ג'ורדן הנילפוטנטי (2.11). ■

3 משפט ג'ורדן הכללי

הגדרה. יהי $n = \dim V$. המרחב העצמי המוכלל $K_\lambda = K_\lambda(T) = \ker(T-\lambda I)^n = \left\{v \in V \;:\; (T-\lambda I)^n v = \vec{0}\right\}$.

למה 3.1 בסימונים הנ"ל:

1. $K_\lambda = \left\{v \in V \;:\; \exists k,\ (T-\lambda I)^k v = \vec{0}\right\}$.
2. $V_\lambda \subseteq K_\lambda$.
3. K_λ אינוריאנטי תחת T (ולכן אינוריאנטי תחת $p(T)$ לכל $p(x) \in \mathbb{F}[x]$).

הוכחה: (1) ההכלה ($\subseteq$) מיידית (ניקח $k = n$).
נוכיח את ההכלה ($\supseteq$). יהי k הטבעי הקטן ביותר כך ש $(T-\lambda I)^{k+1} v = \vec{0}$. אזי הוקטורים

$$v, (T-\lambda I)\, v, \ldots, (T-\lambda I)^k\, v$$

הם מסלול ולכן בת"ל.
לכן, $n = \dim V \geq k+1$. לכן, $n-(k+1) \geq 0$ ונקבל

$$(T-\lambda I)^n\, v = (T-\lambda I)^{n-(k+1)}\, (T-\lambda I)^{k+1}\, v = (T-\lambda I)^{n-(k+1)}\, \vec{0} = \vec{0}\ .$$

(2) מ (1), $V_\lambda = \left\{v \in V \;:\; (T-\lambda I)\, v = \vec{0}\right\} \subseteq K_\lambda$.

(3) T מתחלף עם $T-\lambda I$: $T(T-\lambda I) = TT - \lambda T = (T-\lambda I)T$. לכן, T מתחלף עם כל חזקה של $T-\lambda I$. יהי $v \in K_\lambda$.
אז $(T-\lambda I)^n T v = T(T-\lambda I)^n v = T\vec{0} = \vec{0}$. לכן, גם $Tv \in K_\lambda$.

את העובדה שאם תת־מרחב הוא אינוריאנטי תחת אופרטור T, אז הוא אינוריאנטי תחת $p(T)$ לכל פולינום $p(x)$, נשאיר כתרגיל לקורא. ■

למה 3.2 בסימונים הנ"ל:

1. אם $\lambda \neq \mu$ ו $\vec{0} \neq v \in K_\lambda$, אז $\vec{0} \neq (T-\mu I)\, v \in K_\lambda$.
2. אם $\lambda \neq \mu$, אז $K_\lambda \cap K_\mu = \left\{\vec{0}\right\}$.

הוכחה: (1) כיון ש $v \in K_\lambda$ ו K_λ אינוריאנטי תחת כל פולינום ב T, גם $(T-\mu I)\, v \in K_\lambda$.
נניח ש $(T-\mu I)\, v = \vec{0}$. אז $Tv = \mu v$. נזכור שבמקרה כזה, לכל $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים $p(T)v = p(\mu)v$.
בפרט, עבור $p(x) = (x-\lambda)^n$ נקבל $(T-\lambda I)^n\, v = (\mu-\lambda)^n\, v \neq \vec{0}$, בסתירה להנחה ש $v \in K_\lambda$.

(2) נניח שיש $\vec{0} \neq v \in K_\lambda \cap K_\mu$. מ (1), נקבל שכל הוקטורים הבאים שייכים ל K_λ ושונים מ $\vec{0}$:

$$v, (T-\mu I)\, v, (T-\mu I)^2\, v, \ldots, (T-\mu I)^n\, v$$

בפרט, $(T-\mu I)^n\, v \neq \vec{0}$, בסתירה לכך ש $v \in K_\mu$. ■

למה 3.3 יהי λ ערך עצמי של אופרטור $T : V \to V$. נסמן $I_\lambda = \mathrm{im}(T-\lambda I)^n$. אזי:

1. I_λ אינוריאנטי תחת T.
2. $V = K_\lambda \oplus I_\lambda$.

הוכחה: (1) T מתחלף עם $T-\lambda I$.
(2) יהי $v \in K_\lambda \cap I_\lambda$. אזי $v = (T-\lambda I)^n u$ ולכן $(T-\lambda I)^{2n} u = (T-\lambda I)^n v = \vec{0}$ ולכן (מהלמה הקודמת) $v = (T-\lambda I)^n u = \vec{0}$.
ממשפט המימדים ומשפט הדרגה של העתקה לינארית, נקבל $\dim(K_\lambda \oplus I_\lambda) = \dim K_\lambda + \dim I_\lambda = \dim V$. ■

למה 3.4 יהי λ ערך עצמי של T, ונסמן $T_0 = T|_{K_\lambda}$. אזי $p_{T_0}(x) = (x-\lambda)^m$, כאשר $m = \dim K_\lambda$.

הוכחה: $T_0-\lambda I : K_\lambda \to K_\lambda$ מקיים $(T_0-\lambda I)^n = O$, לכן נילפוטנטי. מהלמה על הפולינום האופייני של אופרטור נילפוטנטי (2.1),

$$x^m = p_{T-\lambda I}(x) = |xI-(T-\lambda I)| = |(x+\lambda)I - T| = p_T(x+\lambda)$$

ואם נציב $y = x+\lambda$ נקבל $p_T(y) = (y-\lambda)^m$. ■

למה 3.5 $\dim K_\lambda$ שווה לריבוי האלגברי של λ.

הוכחה: ניקח בסיסים B, C עבור K_λ, I_λ בהתאמה. מלמת ההצגה האלכסונית־בלוקים (1.6), $[T]_{B\cup C} = [T]_B \oplus [T]_C$, לכן $p_T(x) = p_{T|_{K_\lambda}}(x) \cdot p_{T|_{I_\lambda}}(x)$.
מהלמה הקודמת, $p_{T|_{K_\lambda}}(x) = (x-\lambda)^{\dim K_\lambda}$.
מצד שני, λ אינו ערך עצמי של $T|_{I_\lambda}$ (כי $V_\lambda \subseteq K_\lambda$ ו $K_\lambda \cap I_\lambda = \left\{\vec{0}\right\}$), ולכן $x-\lambda$ אינו גורם ב $p_{T|_{I_\lambda}}(x)$.
כיון שכאמור, $p_T(x) = p_{T|_{K_\lambda}}(x) \cdot p_{T|_{I_\lambda}}(x)$, $x-\lambda$ מופיע $\dim K_\lambda$ פעמים ב $p_T(x)$, וזהו הריבוי האלגברי של λ. ■

משפט 3.6 (פירוק למרחבים עצמיים מוכללים)נניח שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$. יהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ הערכים העצמיים השונים של T. אזי

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_k}$$

פירוק של V לסכום ישר של תת־מרחבים אינוריאנטים.

הוכחה: א. באינדוקציה על $i = 1, \ldots, k$, נראה שהסכום $K_{\lambda_1} + \cdots + K_{\lambda_i}$ הוא ישר: עבור $i=1$ אין מה להוכיח. המקרה $i=2$ הוכח לעיל (למה 3.2).
נניח איפוא שהסכום עד i הוא ישר, ונוכיח עבור $i+1$: יהי $v \in (K_{\lambda_1} + \cdots + K_{\lambda_i}) \cap K_{i+1}$. נציגו $v = v_1 + \cdots + v_i$ כאשר כל $v_j \in K_{\lambda_j}$. נפעיל $(T-\lambda_{i+1}I)^n$, לקבל

$$\vec{0} = (T-\lambda_{i+1}I)^n\, v = (T-\lambda_{i+1}I)^n\, v_1 + \cdots + (T-\lambda_{i+1}I)^n\, v_i$$

כיון שכל K_{λ_i} אינוריאנטי תחת $T-\lambda_{i+1}I$ (למה 3.1), זו הצגה של $\vec{0}$ כאיבר של $K_{\lambda_1} + \cdots + K_{\lambda_i}$. מהנחת האינדוקציה סכום זה ישר, ולכן ההצגה יחידה, ולכן היא בעצם $\vec{0} + \cdots + \vec{0}$, כלומר

$$(T-\lambda_{i+1}I)^n\, v_1 = \cdots = (T-\lambda_{i+1}I)^n\, v_i = \vec{0}$$

כל המקדמים הם 0. לכן, $v_1 \in K_{\lambda_{i+1}} \cap K_{\lambda_1}$, ולכן $v_1 = \vec{0}$. מאותה סיבה, גם $v_2 = \cdots = v_i = \vec{0}$, ולכן $v = \vec{0}$.
ב. כיון שהסכום $K_{\lambda_1} + \cdots + K_{\lambda_k}$ ישר, $\dim(K_{\lambda_1} + \cdots + K_{\lambda_k}) = \dim K_{\lambda_1} + \cdots + \dim K_{\lambda_k}$, ששווה לסכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים של T (למה 3.5). כיון שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים, סכום זה שווה למימד של V, ולכן $V = K_{\lambda_1} + \cdots + K_{\lambda_k}$. ■

משפט 3.7 (משפט ג'ורדן) יהי $T : V \to V$ אופרטור כך שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים. אזי T ניתן להצגה כסכום ישר של בלוקי ג'ורדן. יתר על כן, צורת ג'ורדן היא יחידה עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

הוכחה: קיום: יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ הערכים העצמיים השונים של T.
ממשפט 3.6, $V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_k}$. יהיו $B_1, \ldots, B_k$ בסיסים של $K_{\lambda_1}, \ldots, K_{\lambda_k}$, בהתאמה.
כיון שכל K_λ אינוריאנטי תחת T (למה 3.1), נקבל מלמת ההצגה האלכסונית־בלוקים ש

$$[T]_B = [T]_{B_1} \oplus \cdots \oplus [T]_{B_k}\,.$$

לכל $i = 1, \ldots, k$, כבר ראינו שהפולינום האופייני של $T|_{K_{\lambda_i}}$ הוא חזקה של $x-\lambda_i$.
ממשפט ג'ורדן עבור אופרטור עם ערך עצמי יחיד, אפשר לשנות את B_i כך ש $[T]_{B_i}$ היא סכום ישר של בלוקי ג'ורדן $J_m(\lambda_i)$.

יחידות: יהי B בסיס של V כך ש $[T]_B$ סכום ישר של בלוקי ג'ורדן. יהי λ ערך עצמי של T. נשנה את סדר הבלוקים (על ידי שינוי סדר אברי הבסיס) כך שכל הבלוקים מהצורה $J_m(\lambda)$ מכונסים בתחילת הסכום הישר, ושאר הבלוקים הם כל אחד עם ערך עצמי שונה מ λ. אז $[T]_B = A_\lambda \oplus A'$, כאשר A_λ סכום ישר של של בלוקים מהצורה $J_m(\lambda)$, ואילו A' סכום ישר של בלוקים $J_m(\mu)$ עם $\mu \neq \lambda$. הגודל k של A_λ הוא הריבוי האלגברי של λ, ולכן נקבע באופן יחיד על ידי T.
מהמשפטון על הצגה אלכסונית־בלוקים, אם נסמן $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, אז $A_\lambda = [T]_{\{v_1,\ldots,v_k\}}$, כאשר $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ אינוריאנטי תחת T.
לכן, A_λהיא צורת ג'ורדן של האופרטור $T|_{\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_k\}}$, והפולינום האופייני שלו הוא חזקה של $x-\lambda$. מהמשפט על יחידות צורת ג'ורדן של אופרטור עם ערך עצמי יחיד (2.12), מספר הבלוקים $J_m(\lambda)$ מכל גודל m ב A_λ נקבע באופן יחיד על ידי T. ■

הערה 3.8 בהצגת ג'ורדן של T, לכל ערך עצמי λ של T:

1. מספר הבלוקים $J_m(\lambda)$ הוא הריבוי הגאומטרי של λ.
2. ה m הגדול ביותר כך ש $J_m(\lambda)$ מופיע בהצגת T הוא מעלת $x-\lambda$ ב $m_T(x)$.

מהמשפטים הנ"ל מקבלים מיידית משפטים מתאימים עבור מטריצות ריבועיות A כאשר $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינארים: מפעילים את המשפטים על האופרטור של כפל משמאל במטריצה A.

מסקנה 3.9 מטריצות, שהפולינום האופייני שלהן מתפרק לגורמים לינאריים, הן דומות אם ורק אם יש להן אותה צורת ג'ורדן (עד כדי סדר הבלוקים).

הוכחה: אם המטריצות דומות, אז הן הצגות של אותו אופרטור. (אפשר גם להוכיח ישירות.) ■

אם הפולינום האופייני אינו מתפרק לגורמים לינאריים, אפשר לעבור לשדה יותר גדול שבו הפולינום מתפרק, ולבדוק שם דמיון בעזרת חישוב צורת ג'ורדן.

4 תרגול

ראשית, נסכם את תהליך מציאת הבסיס המג'רדן, "מלמעלה למטה". כל הדוגמאות בתרגול הזה הן מעל $\mathbb{R}$, אבל כמובן שאפשר לתת דוגמאות מעל כל שדה.

4.1 ג'ירדון אופרטור

יהי $T: V \to V$ אופרטור.

נחשב את $p_T(x)$.

אם $p_T(x)$ אינו מתפרק לגורמים לינאריים, אז אין ל T צורת ג'ורדן. נניח איפוא ש $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים.

לשימוש עתידי, נחשב את $m_T(x)$.

יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הערכים העצמיים השונים של T. אז

$$V = K_{\lambda_1} \oplus K_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_m}$$

פירוק של V לסכום ישר של תת־מרחבים אינוריאנטים תחת (כל פולינום ב) T

יש למצוא, לכל $i = 1, \dots, m$, בסיס B_i של K_{λ_i} שמג'רדן את $T|_{K_{\lambda_i}}$. לאחר שנעשה זאת, $B = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ יהיה בסיס מג'רדן, ויתקיים

$$[T]_B = [T]_{B_1} \oplus [T]_{B_2} \oplus \cdots \oplus [T]_{B_m} = \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & O & \cdots & O \\ O & [T]_{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & [T]_{B_m} \end{pmatrix},$$

כאשר כל $[T]_{B_i}$ יהיה סכום ישר של בלוקי ג'ורדן עם ערך עצמי λ_i. אופן מציאת הבסיס B_i גם יאמר לנו כמה בלוקי ג'ורדן מכל גודל יש ב $[T]_{B_i}$, ולכן מהי צורת ג'ורדן של T.

יהי i נתון. $T_i := T - \lambda_i I|_{K_{\lambda_i}}$ הוא נילפוטנטי. סדר הנילפוטנטיות שלו, שנסמן כאן k, הוא חזקת $(x-\lambda_i)$ ב $m_T(x)$.

הבסיס המג'רדן של T_i מתקבל איפוא בשני שלבים:

1. בונים בסיס של $\ker T_i$ על ידי התחלה מבסיס לתת־המרחב הקטן ביותר ברשימה הבאה, השלמתו לבסיס למרחב הבא בתור, וכו', עד להשלמה לבסיס למרחב כולו

$$\operatorname{im} T_i^{k-1} \subseteq \ker T_i \cap \operatorname{im} T_i^{k-2} \subseteq \ker T_i \cap \operatorname{im} T_i^{k-3} \subseteq \ldots \subseteq \ker T_i \cap \operatorname{im} T_i \subseteq \ker T_i.$$

2. כל וקטור בבסיס זה הוא מהצורה $T_i^j v$ כך ש $T_i^i v = \vec{0}$. משלימים כל וקטור כזה למסלול השלם $v, T_i v, \dots, T_i^j v$. אוסף כל המסלולים הוא הבסיס המג'רדן, וכל מסלול תורם בלוק ג'ורדן אחד, שגודלו שווה לאורך המסלול.

בשפה של T המקורי, לכל $j=0,\dots,k-1$:

$$\begin{aligned}\ker T_i &= K_{\lambda_i}\cap\ker(T-\lambda_iI)=\ker(T-\lambda_iI)=V_{\lambda_i}\\ \operatorname{im}T_i^j &= K_{\lambda_i}\cap\operatorname{im}(T-\lambda_iI)^j\\ \ker T_i\cap\operatorname{im}T_i^j &= V_{\lambda_i}\cap\operatorname{im}(T-\lambda_iI)^j\end{aligned}$$

ולכן שרשרת התת־מרחבים הנ"ל היא למעשה

$$V_{\lambda_i}\cap\operatorname{im}(T-\lambda_iI)^{k-1}\subseteq V_{\lambda_i}\cap\operatorname{im}(T-\lambda_iI)^{k-2}\subseteq V_{\lambda_i}\cap\operatorname{im}(T-\lambda_iI)^{k-3}\subseteq\ldots\subseteq V_{\lambda_i}\cap\operatorname{im}(T-\lambda_iI)\subseteq V_{\lambda_i}.$$

והמסלולים שסוללים מכל וקטור בבסיס המתקבל נראים כך $v,(T-\lambda_iI)v,\dots,(T-\lambda_iI)^jv$.

מבחינה חישובית, גם במקרה של אופרטור נעבוד בפועל עם הצגה כלשהי שלו כמטריצה. לכן נתרגם את הדיון הנ"ל לשפה של מטריצות.

4.2 ג'ירדון מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.

נחשב את $p_A(x)$.

אם $p_A(x)$ אינו מתפרק לגורמים לינאריים, אז אין ל A צורת ג'ורדן. נניח איפוא ש $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים.

לשימוש עתידי, נחשב את $m_A(x)$.

יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ הערכים העצמיים השונים של A.

יהי i נתון. יהי k חזקת $(x-\lambda_i)$ ב $m_A(x)$.

נחשב בסיס B_i של K_{λ_i} בשני שלבים:

1. בונים בסיס של V_{λ_i} על ידי התחלה מבסיס לתת־המרחב הקטן ביותר ברשימה הבאה, השלמתו לבסיס למרחב הבא בתור, וכו', עד להשלמה לבסיס למרחב כולו

$$V_{\lambda_i}\cap\operatorname{Col}(A-\lambda_iI)^{k-1}\subseteq V_{\lambda_i}\cap\operatorname{Col}(A-\lambda_iI)^{k-2}\subseteq V_{\lambda_i}\cap\operatorname{Col}(A-\lambda_iI)^{k-3}\subseteq\ldots\subseteq V_{\lambda_i}\cap\operatorname{Col}(A-\lambda_iI)\subseteq V_{\lambda_i}.$$

   למשל, למציאת בסיס של $V_{\lambda_i}\cap\operatorname{Col}(A-\lambda_iI)^{k-1}$ אפשר:

   (א) לחשב את $(A-\lambda_iI)^{k-1}$ ולקחת בסיס $u_1,\dots,u_r$ של מרחב העמודות שלה.

   (ב) עבור משתנים $x_1,\dots,x_r$, נפתור את מערכת המשוואות $(A-\lambda_iI)(x_1u_1+\dots+x_ru_r)=\vec{0}$ וניקח בסיס למרחב הפתרונות.

2. כל וקטור בבסיס זה הוא מהצורה $(A-\lambda_iI)^jv$ כך ש $(A-\lambda_iI)^{j+1}v=\vec{0}$. משלימים כל וקטור כזה למסלול השלם $v,(A-\lambda_iI)v,\dots,(A-\lambda_iI)^jv$. אוסף כל המסלולים הוא הבסיס המג'רדן, וכל מסלול תורם בלוק ג'ורדן אחד, שגודלו שווה לאורך המסלול.

המטריצה המג'רדנת P היא המטריצה שעמודותיה הן אברי כל המסלולים שסללנו לעיל, מסודרים כך שקודם כותבים את סוף המסלול, וממשיכים ימינה עד להתחלת המסלול. (אם נעשה להיפך, הבלוקי ג'ורדן יצאו משוחלפים.) אז $P^{-1}AP$ תהיה צורת ג'ורדן של A.

הערה: אם ל A יש ערך עצמי יחיד λ ו k הוא סדר הנילפוטנטיות של $A-\lambda I$, אז $\operatorname{Col}(A-\lambda I)^{k-1}\subseteq V_\lambda$, ולכן לא צריך לחתוך עם V_λ בחישוב המרחב השמאלי ביותר. (כך עשינו גם בהוכחת משפט ג'ורדן הנילפוטנטי.)

הערה 4.1 ישנן כל מיני שיטות להאצת התהליך, אבל מעט יותר קשה להוכיח את תקפותן. כמו כן, חלק מהשיטות שתוכלו למצוא באינטרנט הן פשוט לא נכונות. השתמשו בזהירות.

4.3 דוגמאות עם ערך עצמי יחיד

4.3.1 מטריצות 3×3

בחרנו דוגמאות שבהן החישובים קצרים, כדי להמחיש את השיטה בצורה קצרה יותר.

דוגמה 1: נג'רדן את המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&-1&3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$.

$p_A(x) = (x-2)\left((x-1)(x-3)+1\right) = (x-2)(x^2-4x+4) = (x-2)^3$ מתפרק לגורמים לינאריים, לכן אפשר לג'רדן.

$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ (למעשה, מספיק לחשב את שני האיברים הראשונים של השורה הראשונה של $(A-2I)^2$ כדי לראות זאת). לכן, $m_A(x) = p_A(x) = (x-2)^3$.

לכן, צורת ג'ורדן של A היא $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, כלומר הבסיס המג'רדן של האופרטור $A-2I$ הוא מסלול אחד באורך 3.

כעת נראה איך מוצאים מטריצה מג'רדנת P עבור A. ל A יש רק הערך העצמי 2.

$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ואת $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ כבר חישבנו לעיל, וסדר הנילפוטנטיות הוא 3. יש למצוא בסיס ל V_2 משמאל לימין, בסדרה

$$\mathrm{Col}\,(A-2I)^2 \subseteq V_2 \cap \mathrm{Col}\,(A-2I) \subseteq V_2$$

אבל אנו כבר יודעים שהבסיס יהיה מסלול אחד מאורך 3, כלומר יש למצוא וקטור אחד במרחב השמאלי, ואז המסלול שמסתיים בו הוא הבסיס.

מהתבוננות במטריצה $(A-2I)^2$ שחושבה לעיל, רואים ש $\mathrm{Col}(A-2I)^2 = \mathrm{span}\,\{e_1\}$.

כעת, $e_1 = (A-2I)^2 e_3$ (כי זו העמודה השלישית של $A-2I$), לכן המסלול הוא:

$$\left\{e_1 = (A-2I)^2 e_3, (A-2I)e_3, e_3\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

.

נשים את הבסיס שקיבלנו בעמודות מטריצה: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. חייב להתקיים $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ואכן חישוב ישיר מראה זאת.

דוגמא 2: נדגים בקצרה את שתי האפשרויות הנותרות עבור מטריצות 3×3 עם ערך עצמי יחיד:

א. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $p_A(x) = (x-2)^3$, ו $m_A(x) = (x-2)^2$. לכן, צורת ג'ורדן היא $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, והבסיס המג'רדן יכיל מסלול אחד מאורך 2 ומסלול אחד מאורך 1. כלומר, בשרשרת

$$\mathrm{Col}\,(A-2I) \subseteq V_2$$

המרחב השמאלי (שנותן מסלולים מאורך 2) יהיה ממימד 1, והמרחב הימני (שנותן מסלולים מאורך 1) יוסיף מימד 1, כלומר יהיה ממימד 2.

$$\mathrm{Col}\,(A-2I) = \mathrm{Col} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\,\{e_3\}$$

ו $e_3 = (A-2I)e_1$, לכן המסלול שתורם מרחב זה הוא e_3, e_1.

את e_3 עלינו להשלים לבסיס עבור $V_2 = \mathrm{Null}(A-2I) = \mathrm{Null} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\,\{e_2, e_3\}$, אז ניקח את e_2.

המטריצה המג'רדנת תהיה $P = (e_3, e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ב. במקרה הנותר, $m_A(x) = x - 2$ ולכן צורת ג'ורדן היא $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. כיון ש $J = P^{-1}AP$ עבור P מתאימה, הדוגמא היחידה היא

$$A = PJP^{-1} = P(2I)P^{-1} = 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שהיא כבר בצורת ג'ורדן (וכל מטריצה הפיכה היא "מג'רדנת", למשל $P = I$). אם נתעקש לעשות את תהליך הג'ירדון בכל זאת, נראה שעלינו למצוא בסיס ל V_2 בלבד, כי סדר הנילפוטנטיות של $A-2I$ הוא 0. כלומר, יש 3 וקטורים עצמיים שתורמים כל אחד מסלול מאורך 1.

תרגיל: צורת ג'ורדן של מטריצה 3×3 נקבעת באופן יחיד על ידי הפולינום האופייני והפולינום המינימלי שלה.

4.3.2 מטריצות 4×4 עם ערך עצמי יחיד

$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 4 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -6 & 3 & 5 & -6 \\ 7 & -2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$. $p_A(x) = (x-2)^4, m_A(x) = (x-2)^2$. לכן יש שתי אפשרויות לבסיס המג'רדן: שני מסלולים מאורך 2, או מסלול אחד מאורך 2 ושני מסלולים מאורך 1. מספר המסלולים מאורך 2 הוא המימד של $\mathrm{Col}\,(A-2I)$.

$$\mathrm{Col}\,(A-2I) = \mathrm{span}\,\{(A-2I)e_1, (A-2I)e_2\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

לכן יש שני מסלולים מאורך 2, ואלה נותנים לנו את המטריצה המג'רדנת:

$$P = ((A-2I)e_1, e_1, (A-2I)e_2, e_2) = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ומתקיים $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (זה חייב להתקיים. חישוב P^{-1} במפורש רצוי רק לצרכי בדיקה שלא טעינו בחישוב.)

תרגיל: ג'רדן את המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.4 דוגמא עם יותר מערך עצמי אחד

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2 = p_A(x)$ ולכן צורת ג'ורדן היא $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, כלומר יהיה מסלול אחד באורך 2 עבור כל אחד מהערכים העצמיים של A.

עבור הערך העצמי 2, יש לחשב איפוא את

$$\begin{aligned} V_2 \cap \mathrm{Col}(A-2I) &= V_2 \cap \mathrm{Col}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = V_2 \cap \mathrm{span}\,\{e_1, e_2, e_3\} = \\ &= V_2 \cap \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}\right\} \end{aligned}$$

שימו לב! כאן לא יכלנו לוותר על החיתוך עם V_2, כיון ש $A-2I$ אינה נלפוטנטית (כי ל A יש עוד ערכים עצמיים חוץ מ 2).

פתרון המערכת ההומוגנית הוא $x = z = 0$, $y \in \mathbb{R}$ כלשהו. לכן, $e_2 = (A-2I)e_4$ בסיס עבור המרחב, ותורם את המסלול e_2, e_4.

עבור הערך העצמי 1, יש לחשב את

$$\begin{aligned} V_1\cap \mathrm{Col}(A-1I) &= V_1\cap \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = V_2\cap \mathrm{span}\left\{e_1,e_2,e_4\right\} = \\ &= V_2\cap\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\\ z\end{pmatrix} : x,y,z\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\\ z\end{pmatrix} = \vec{0}\right\} \end{aligned}$$

פתרון המערכת ההומוגנית הוא $y=z=0$, $x\in\mathbb{R}$ כלשהו. לכן, $e_1=(A-2I)e_3$ בסיס עבור המרחב, ותורם את המסלול e_1,e_3.

לכן, המטריצה $P=(e_2,e_4,e_1,e_3)$ מקיימת

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2&1&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

4.5 דוגמא לסיום

$A=\begin{pmatrix} -1&1&1&3\\ 0&-1&1&1\\ 0&0&-1&-2\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$. $p_A(x)=(x-1)(x+1)^3=m_A(x)$, ולכן צורת ג'ורדן היא $\begin{pmatrix} -1&1&0&0\\ 0&-1&1&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$,
כלומר יהיה לנו מסלול אחד מאורך 3 עבור הערך העצמי -1, ומסלול אחד מאורך 1 (כלומר, וקטור עצמי) עבור הערך העצמי 1.

$\lambda=-1$: וקטור בחיתוך

$$V_{-1}\cap\mathrm{Col}(A+1I)^2 = V_{-1}\cap\mathrm{Col}\begin{pmatrix} 0&0&1&5\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&-4\\ 0&0&0&4 \end{pmatrix}$$

הוא מהצורה $v=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}5\\0\\-4\\4\end{pmatrix}$ וצריך לקיים $(A+I)v=\vec{0}$. נחשב:

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&3\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&-2\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+5y\\ 0\\ -4y\\ 4y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8y\\ 0\\ -8y\\ 8y\end{pmatrix}$$

לכן דרוש $y=\vec{0}$ ו $x\in\mathbb{R}$ כלשהו. ניקח $x=1$, כלומר $v=e_1=(A+I)^2e_3$. המסלול הוא $e_1,(A+I)e_3,e_3$, שהוא $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\lambda=1$: נפתור את המשוואה $(A-I)v=\vec{0}$ למצוא וקטור עצמי $v=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

ניקח איפוא $P=\begin{pmatrix} 1&1&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ ונקבל ש $P^{-1}AP$ היא בצורת ג'ורדן ש"ניבאנו" לעיל.

תודות

תודה לפרופ' עוזי וישנה, שהמציא לידיי הוכחה אינדוקטיבית של משפט ג'ורדן הנילפוטנטי (קיום). הצעד הראשון לקראת קבלת ההוכחה המוצגת כאן היה הפיכת הוכחתו להוכחה מפורשת, כלומר כזו שבה רואים בעיניים מהו הבסיס המג'רדן. מנקודה זו החלה סידרת פישוטים והשלמת פרטים, שהסתיימה בגירסה הנוכחית. בויקיפדיה היתה דרך מאד קלה (אך שגויה) למציאת בסיס מג'רדן, שנטעה בי את התקוה שאפשר לתת הוכחה פשוטה יחסית (ונכונה) למשפט. תודה לפרופ' בוריס קוניאבסקי ולתלמידיי לידור אלדבח וחופית מרזוק, על הערותיהם ותיקוניהם לגירסאות קודמות.

לתיקונים אודה. האימייל שלי מתקבל מ tsa777ban@math.biu.ac.il על ידי הסרת כל הספרות.