## 8 תרגול 8

1. תרגיל: נגדיר $V=\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = 2xx' + yy'$ ו $W=\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הסקלארית. מצאו את ההעתקה הצמודה ל- $T(x,y) = (2x+3y, 2y)$.

פתרון: הבסיס $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ הוא בסיס או"נ ל $V$ והבסיס הסטנדרטי $S' = \{e_1.e_2\}$ הוא בסיס או"נ ל $W$ נציג את ההעתקה לפי בסיסים אלו:
$[T]^s_{s'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. אז: $[T^*]^{S'}_S = ([T]^S_{S'})^* = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

לכן

$$[T^*(x,y)]_S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} [(x,y)]_{S'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}x \\ 3x+2y \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T^*(x,y) = \sqrt{2}x \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + (3x+2y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x+2y \end{pmatrix}$$

.

2. יהא $V=\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית ויהא $\{0\} \neq W \leq V$ תת מרחב של $V$.
נגדיר $T: V \to V$ ע"י $Tv = \pi_W(v)$ (פונקצית ההטלה הניצבת). מצאו את $T^*$.
פתרון: נבחר בסיס או"נ $B_1$ ל $W$ ובסיס או"נ $B_2$ ל $W^\perp$ אזי לפי הבסיס האו"נ $B = B_1 \cup B_2$ של $V$ מתקיים כי $[T]^B_B = I_{\dim W} \oplus 0_{\dim W^\perp}$ בגלל ש לכל $w \in W$ מתקיים $Tw = w$ ולכן $v \in W^\perp$ מתקיים $Tv = 0$.
כיוון ש $B$בסיס או"נ, נקבל כי

$$[T^*]^B_B = \left([T]^B_B\right)^* = [T]^B_B$$

כאשר המעבר האחרון נכון כיוון שהמטריצה אלכסונית. כיוון שייצוג ה"ל היא פונקציה חח"ע נקבל כי $T^* = T$.

3. תרגיל: תהי $T: V \to V$ הע"ל, ו$U \leq V$ תת מרחב $T$- אינוואריאנטי. אזי $U^\perp$ הוא $T^*$ אינוואריאנטי.
הוכחה: יהי $w \in U^\perp$, ו$u \in U$. $\langle T^*(w), u\rangle = \langle w, T(u)\rangle = 0$ מכיוון ש$T(u) \in U$ ו $w \in U^\perp$. לכן, $T^*(w) \in U^\perp$.

4. תרגיל: תהי $T: V \to W$ הע"ל. אזי: $(Im(T))^\perp = \ker(T^*)$.
הוכחה:
$\subseteq$: יהי $w \in (Im(T))^\perp$. כלומר, לכל $v \in V$, $\langle w, T(v)\rangle = 0$.
אזי: $\langle T^*(w), v\rangle = 0$. כלומר, $T^*(w)$ ניצב לכל $V$ ולכן $T^*(w) = 0$. כלומר, $w \in \ker T^*$.
$\supseteq$: יהי $w \in \ker T^*$. כלומר, $T^*(w) = 0$.

יהי $v \in V$. $\langle w, T(v)\rangle = \langle T^*(w), v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$.

נקבל ש: $w \in (Im(T))^\perp$.

הערה: באופן שקול:

(א) $Im(T) = (\ker T^*)^\perp$

(ב) $(ImT^*)^\perp = \ker T$

מסקנה:

(א) $T$ על $\iff$ $T^*$ חח"ע.

(ב) $T$ חח"ע $\iff$ $T^*$ על.

הסבר:

1. $T$ על $\iff$ $ImT = W$ $\iff$ $(ImT)^\perp = \{0\}$ $\iff$ $\ker T^* = \{0\}$ $\iff$ $T^*$ חח"ע.
2. נובע מ1 ע"י החלפת $T$ ב $T^*$.