הרצאה XX- אינפי 1

בשיעור קודם הוכחנו כי עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, x>0 \\ 0, x\le 0\end{cases}$ מתקיים $f\in D^{\infty}(-\infty,\infty)$. וגם $f^{\infty}(0)=0$. ז"א $\lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}}=0$

ולכן $0=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$. לפי אינדוקציה אפשר להוכיח שהנגזרת באפס תמיד מתאפסת, ושהנגזרת קיימת תמיד.

<u>מסקנה ממשפט לגרנג'</u>:

<u>משפט</u>: אם $\mathrm{f}\in \mathrm{D}(\mathrm{a},\mathrm{b})$, $\exists M\ge 0 : |f'(x)|\le M$ אזי f רציפה במ"ש.

הוכחה: אם *M=0* הפונקציה היא קבועה, ולכן ברור שהיא במ"ש. אם *M>0* נקבע $\varepsilon>0$. ונגדיר $\delta:=\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}$ אם $x',x''\in(a,b)$ כך שמתקיים $|x'-x''|<\delta$ לכן $|f(x')-f(x'')|\le M|x'-x''|<M\delta=\varepsilon$.

דוגמא: $f(x)=\sqrt{x}$ וגם $x\ge 1$. לכן $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\le\frac{1}{2}$.

<u>משפט</u>: (כלל לייבניץ מוכלל) נניח $u,v\in D^n(a,b)$ לכן מתקיים $(uv)^n=\sum_{k=0}^n u^k v^{n-k}\binom{n}{k}$.

למה כללית שצריך לדעת: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$.

הוכחה: נוכיח בעזרת אינדוקציה: נבדוק עבור *n=1*. וידוע שמתקיים $(uv)'=u'v+v'u$. נניח שמתקיים $(uv)^n=\sum_{k=0}^n u^k v^{n-k}\binom{n}{k}$, נותר להוכיח שמתקיים $(uv)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\left(u^k v^{n-k}\right)'\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}u^{k+1}v^{n-k}+\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}u^k v^{n-k+1}$ נגדיר $s=k+1$. נקבל $(uv)^{n+1}=\sum_{s=1}^{n+1}\binom{n}{s-1}u^s v^{n-s+1}+\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}u^k v^{n-k+1}=\binom{n}{0}u^0v^{n+1}+\sum_{k=1}^n\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]u^k v^{n+1-k}+\binom{n}{n}u^{n+1}v^0\underbrace{=}_{\text{ע"פ למה}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}u^k v^{n+1-k}$ מ.ש.ל.

דוגמא: $(fg)''=f''g+2f'g'+fg''\ \&\ (fg)'''=f'''g+3f''g'+3f'g''+fg'''$.

כעת נעבור למשפט אולי הכי חשוב בחשבון הדיפרנציאלי:

<u>נוסחת טיילור</u>: אם פונקציה גזירה *n* פעמים אז סביב נקודה x_0 יש קירוב טוב על ידי פולינום מחזקה *n*. המטרה היא להראות שמתקיים בעזרת הפולינום $f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n), x\to x_0$. מה זה פולינום בעצם? $P(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n , n=degP$.

באופן כללי נחפש קירוב לנגזרות עד למעלה *n*. באצם אנחנו מחפשים שעבור $x_0\in(a,b)$ מתקיים לכל $1\le i\le n$ $p^{(i)}(x_0)=f^{(i)}(x_0)$.

קיבלנו את הפולינום הבא $p(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n=c_0+c_1\big((x-x_0)+x_0\big)+\cdots+c_n\big((x-x_0)+x\big)^n$. כעת נוכיח את הלמה הבאה:

<u>למה</u>: $\begin{cases} j!\ , k=j \\ 0\ , k\neq j \end{cases} = \left[(x-x_0)^j\right]^{(k)}_{x=x_0}$.

הוכחה: עבור $j>k$ מתקבל $\left((x-x_0)^j\right)' = j(x-x_0)^{j-1} = \cdots = 0$. עבור $k \le j$ מתקיים עבור הנגזרת $\left[(x-x_0)^j\right]^{(k)} = j(j-1)\dots(j-k+1)(x-x_0)^{j-k}$. אז עבור $j>k$ מתקבל שוב 0, ועבור $j=k$ מתקבל $j!$. כעת ננסה לפתור את המשוואה: $p(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j(x-x_0)^j$ וגם $p^{(k)}(x_0)=a_k\cdot k!$ ולכן מתקבל $a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, וככה יראו כל המקדמים.

<u>הגדרה</u>: $f\in D^n(a,b)$ כאשר $x_0\in(a,b)$. הפולינום $p(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. פולינום של טיילור *(Taylor)* בנקודה x_0 של f. $P=P_n(f)(x_0,x)$. מתקיים $f(x)=\underbrace{P_n(x_0,x)}_{\text{פולינום טיילור}}+\underbrace{r_n(x_0,x)}_{\text{שארית}}$.

<u>משפט</u>: נניח $f\in D^n(a,b)$ כאשר $x_0\in(a,b)$. אזי $f(x)=P_n(x,x_0)+o((x-x_0)^n), x\to x_0$. (צורת *Peano*)

הוכחה: באינדוקציה. עבור *n=1* זה כמעט ברור, כי $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0), x\to x_0$. כעת נניח את הנחת האינדוקציה, ז״א נניח את נכונות הטענה עבור *n-1*. ז״א ש$f'\in D^{n-1}(a,b)$ ולפי ההנחה מתקיים סביב x_0 התנאי הבא, הלא הוא נתון על ידי $f'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(f')^{(k)}}{k!}(x_0)(x-x_0)^k+o(x-x_0)^{n-1}$. נבדוק $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} =$ (כלל לופיטל) $= \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}} = \{k-1=s\} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{f^{(s+1)}(x_0)}{s!}(x-x_0)^s}{n(x-x_0)^{n-1}} \underbrace{=}_{\text{לפי הנחה}} 0$.

<u>צורות שונות לטיילור</u>:

- $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+0(x-x_0)^n, x\to x_0$.
- $f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)h}{1!}+\cdots.+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+o(h^n), h\to 0$.

נוסחת טיילור בנקודה $x_0=0$ נקראת נוסחה של *Taylor-McLaurent* (טיילור-מֶקְלוֹרֶן).

דוגמאות:

1. $f(x)=e^x$. לכן מתקיים $e^x|^{(k)}_{x=0}=1$. לכן מתקיים $e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+o(x^n), x\to 0$.
2. $f(x)=\sin x$ לכן מתקיים $(\sin x)'=\cos x\,|_{x=0}=1$ לכן $\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}x^{2k+1}+o\left(x^{2k+1}\right), x\to 0$.
3. $f(x)=cos\,x$ לכן $\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+o\left(x^{2k}\right), x\to 0$,.
4. $f(x)=\ln(1+x)$ מתקיים $\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k+o(x^n), x\to 0=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n), x\to 0$.
5. $f(x)=(1+x)^\alpha$ מתקיים:
   - $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$
   - $f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$.

   לכן $(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+0(x^n), x\to 0$.

כדי לסדר את העין: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots + 0(x^8), x \to 0$.

<u>משפט</u>: (נוסחאת טיילור עם שעארית בצורת לגרנג׳).

תהי $f \in D^{n+1}(a,b)$. אזי $f(x) = P_n(x_0, x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ עבור $c \in (x_0, x) \vee c \in (x, x_0)$ נסמן זאת גם בעזרת הסימון $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ כאשר $0 < \theta < 1$. שארית בצורה לגרנג׳ היא $r_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ כך ש$c = c(x)$.

נוסחת טיילור לגרנג׳ טוענת כך: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

או שניתן לבטא אותה כך $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. נוכיח את נכונותה בהרצאה הבאה.

מה שיפה בנוסחה הזו היא שאנו יכולים לבחור כמה דיוק אנחנו רוצים לפונקציה, ולדעת מה השגיאה המקסימלית, משהו ש*peano* לא נותן לנו. צורת פיאנה לא כמותית, וצורת לגרנג׳ כן.