סמסטר א' 2014

10 בנובמבר 2013

הורדת סדר משוואות

1. כאשר חסר y במשוואה, הצבה מהצורה $z = y^{(k)}$ כאשר k היא הנגזרת הנמוכה ביותר המופיעה במשוואה.
2. כאשר חסר x: $y\prime = z(y), y\prime\prime = z \cdot \frac{dz}{dy}$.
3. כאשר ידוע פתרון פרטי מהצורה $y = y_p$, נציב $y = y_p \cdot u(x)$.
4. משוואת ריקטי הינה משוואה מהצורה $y\prime = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ נפתור ע"י הצבה $y = y_p + u(x)$ כאשר y_p הוא פתרון פרטי. לאחר מכן נקבל משוואת ברנולי.
5. משוואת לגרנז' זו משוואה מהצורה $y = x \cdot F(p) + G(p), p = y\prime$ נציב $\frac{dx}{dp} = \frac{xF\prime(p)+G\prime(p)}{p-F(p)}$.

דוגמה 1: פתרו את המד"ר הבאות:

1. $x \cdot \frac{d^3y}{dx^3} - 2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0$.
2. $y\prime\prime = (y\prime)^3 + y\prime$.
3. $(1-2x)y\prime\prime + 4xy\prime - 4y = 0$
4. $y\prime + 2y^2 = \frac{6}{x^2}$.
5. $y\prime + y = x(y\prime)^2$.

פתרונות:

1. נשים לב כי הנגזרת הנמוכה ביותר שנמצאת במשוואה היא מסדר 2. לכן, לפי סעיף 1 נציב $z(x) = y\prime\prime$: $x \cdot z\prime - 2z = 0$

$$\begin{aligned} \frac{z\prime}{z} &= \frac{2}{x} \\ \ln(z) &= 2\ln x + c^\star \\ z &= cx^2 \\ y\prime\prime &= cx^2 \\ y &= c_1x^4 + c_2x + c_3 \end{aligned}$$

2. נשים לב שאין x במשוואה ולכן לפי מקרה 2 נציב $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z \Leftarrow$
$.y' = z(y)$

$$\begin{aligned}
z \cdot \frac{dz}{dy} &= z^3 + z / : z \\
\frac{dz}{dy} &= z^2 + 1 \\
\frac{dy}{dz} &= \frac{1}{z^2+1} \\
\int dy &= \int \frac{dz}{z^2+1} \\
y + c &= \arctan z \\
z &= \tan(y+c) \\
y' &= \tan(y+c) \\
\frac{dx}{dy} &= \cot(y+c) \\
\int dx &= \int \cot(y+c) dy \\
x + c_1 &= \ln|\sin(y+c)| \\
c_1 e^x &= \sin(y+c) \\
y &= \arcsin(c_1 e^x) + c_2
\end{aligned}$$

נשים לב שצריך לבדוק פתרון סינגולריי עבור $z = 0$ (כלומר $y = c$), וזה אכן פתרון סינגולרי.

3. נחפש פתרון פרטי ואחרי זה נציב $y = y_p \cdot u(x)$. תחילה נחפש פיתרון פרטי ע"י איפוס אחת מהנגזרות. ברור שאם נבחר $y = ax$ נקבל $y'' = 0$. לכן $y = ax$

מקיימת את המשוואה לכל a, ונבחר $y_p = x$. לכן, ההצבה המתבקשת היא:

$$\begin{aligned}
y &= x \cdot u(x) \\
y\prime &= u(x) + xu\prime(x) \\
y\prime\prime &= y\prime(x) + u\prime(x) + xu\prime\prime(x) = 2u\prime(x) + xu\prime\prime(x) \\
\Rightarrow (1-2x)(2u\prime + xu\prime\prime) + 4x(u + xu\prime) - 4xu &= 0 \\
2u\prime - 4xu\prime + xu\prime\prime - 2x^2u\prime\prime + 4xu + 4x^2u\prime - 4xu &= 0 \\
u\prime(2 - 4x + 4x^2) + u\prime\prime(x - 2x^2) &= 0 \\
\frac{u\prime\prime}{u\prime} &= \frac{4x^2 - 4x + 2}{2x^2 - x} \\
\ln(u\prime) &= \int \frac{4x^2 - 4x + 2}{2x^2 - x} dx \\
&= \int \frac{4x^2 - 2x - 2x + 2}{2x^2 - x} dx \\
&= \int \left(2 - \frac{2x - 2}{2x^2 - x}\right) dx \\
&= \int (2 - \frac{2}{x} + \frac{2}{2x - 1}) dx \\
&= 2x - 2\ln x + \ln(2x - 1) + c \\
u\prime &= c_1 e^{2x} \left(\frac{2x - 1}{x^2}\right) \\
u &= \int c_1 e^{2x} \left(\frac{2x - 1}{x^2}\right) dx \\
y &= c_1 x \int e^{2x} \left(\frac{2x - 1}{x^2}\right) dx
\end{aligned}$$

4. זו משוואת ריקטי:כרשב

$$\begin{aligned}
y\prime &= -2y^2 + \frac{6}{x^2} \\
a(x) &= -2, \quad b(x) = 0, \quad c(x) = \frac{6}{x^2}
\end{aligned}$$

פתרון פרטי של המשוואה הוא מהצורה $y_p = \frac{a}{x}$.

$$\begin{aligned}
-\frac{a}{x^2} &= -2\frac{a^2}{x^2} + \frac{6}{x^2} \\
2a^2 - a - 6 &= 0 \\
a &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = 2, -1.5
\end{aligned}$$

נבחר $y_p = \frac{2}{x}$ כלומר נציב $y = \frac{2}{x} + z(x)$. נציב במשוואה:

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{x^2} + z\prime + 2\left(\frac{2}{x} + z\right)^2 &= \frac{6}{x^2} \\
-\frac{2}{x^2} + z\prime + \frac{8}{x^2} + \frac{8z}{x} + 2z^2 &= \frac{6}{x^2} \\
z\prime + 2z^2 + \frac{8z}{x} &= 0 \\
\frac{z\prime}{z} + z + \frac{8}{x}\cdot\frac{1}{z} &= 0
\end{aligned}$$

זו משוואת ברנולי. נציב $t = \frac{1}{z}, t\prime = -\frac{1}{z^2}z\prime$:

$$\begin{aligned}
-t\prime + 2 + \frac{8t}{x} &= 0 \\
t\prime - \frac{8}{x}t &= 2 \\
t(x) &= e^{\int \frac{8}{x}dx}\left(\int 2e^{-\int \frac{8}{x}dx}dx + c\right) \\
&= x^8\left(\int 2\frac{1}{x^8}dx + c\right) \\
&= x^8\left(-\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{x^7} + c\right) = -\frac{2}{7}x + cx^8 \\
\Rightarrow z &= \frac{1}{t} \Rightarrow y = \frac{2}{x} + \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

5. זו משוואת לגרנז'. נרשום את המשוואה באופן הבא:

$$\begin{aligned}
y &= x(y\prime)^2 = y\prime \\
y &= xp^2 - p \\
F(p) = p^2 \quad &, \quad G(p) = -p \\
\frac{dx}{dp} &= \frac{xF\prime(p) + G\prime(p)}{p - F(p)} = \frac{2xp - 1}{p - p^2} \\
&= 2x\cdot\frac{p}{p - p^2} - \frac{1}{p - p^2} \\
x\prime - 2\frac{1}{1-p}\cdot x &= \frac{-1}{p - p^2}
\end{aligned}$$

והפתרון הוא :

$$\begin{aligned} x &= e^{\int \frac{2}{1-p}dp}\left(-\int \frac{1}{p-p^2}e^{-\int \frac{2}{1-p}dp}dp + c\right) \\ &= e^{-2\ln(1-p)}\left(-\int \frac{1}{p-p^2}(1-p)^2 dp + c\right) \\ &= (1-p)^{-2}\left(-\int \frac{1-p}{p^2}dp + c\right) \\ &= \frac{1}{(1-p)^2}\left(p - \ln(p) + c\right) \end{aligned}$$

קיבלנו

$$\begin{cases} x = \frac{p-\ln p+c}{(1-p)^2} \\ y = xp^2 - p \end{cases}$$

משוואת הקיום והיחידות

נתונה המד"ר מהצורה $\begin{cases} y\prime = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ בעלת התנאים f, f_y רציפות בתחום המכיל את x_0, y_0 אזי קיים פיתרון מהצורה $y = \phi(x)$ והוא יחיד.

הערה: עבור מד"ר ליניארית מסדר ראשון $f(x,y) = -p(x)yq(x)$ מספיק לדרוש רציפות של $p(x)$ ו־$q(x)$. בגלל ש־$f_y = -p(x)$.

דוגמה 2: נתונה המשוואה $\begin{cases} xy\prime + 2y - 4x^2 = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$. מצא את הפיתרון והסבר מדוע אינו קיים פתרון נוסף בנק' $x = 0$.

פתרון: נרשום את המשוואה באופן הבא: $y\prime + \frac{2}{x}y - 4x = 0$. זו משוואה לינארית מסדר 1,נפתור את המשוואה לפי הנוסחה:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(\int 4xe^{\int \frac{2}{x}dx}dx + c\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\int 4x \cdot x^2 dx + c\right) \\ &= \frac{1}{x^2}(x^4 + c) = x^2 + \frac{c}{x^2} \end{aligned}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + \frac{c}{1} \\ c &= 1 \end{aligned}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא $y = x + \frac{1}{x^2}$. אין פתרון ב־$x = 0$ כיוון והפונקציה לא רציפה ב$x = 0$.

דוגמה 3: מצאו פתרון למשוואה הבאה: $\begin{cases} y\prime + 2y = q(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ כאשר $q(x)$ מוגדר באופן הבא בקטע $(-\infty, 1]$:

$$q(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

וקבע האם הפתרון יחיד.

פתרון: נחלק למקרים:

1. $0 \le x \le 1$:

$$\begin{aligned} y\prime + 2y &= 1 \\ y &= e^{-\int 2dx}\left(\int e^{\int 2dx} + c\right) \\ &= e^{-2x}\left(\int e^{2x}dx + c\right) \\ &= e^{-2x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + c\right) = \frac{1}{2} + c \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

נציב את תנאי ההתחלה: $\frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{-1}{2}$. לכן $y = \frac{e^{2x}-1}{2e^{2x}}$.

2. אחרת נקבל:

$$\begin{aligned} y\prime + 2y &= 0 \\ y\prime &= -2y \\ \frac{y\prime}{y} &= -2 \\ \ln y &= -2x + c \\ y &= \frac{c}{e^{2x}} \end{aligned}$$

כדי שהפתרון יהיה יחיד, דרוש שנראה רציפות של הפתרון. נשתמש בתנאי ההתחלה כדי שאכן יתקיים. אז נדאג שתהיה רציפות ב$x = 0$ כלומר

$$\frac{c}{e^{2 \cdot 0}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot 0} = 0 \Rightarrow c = 0$$

קיבלנו שהפונקציה הדרושה לפיתרון היא $y = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{2e^{2x}} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$. הנגזרת אינה רציפה ב$x = 0$ ולכן לא ניתן להסיק דבר ממשפט הקיום והיחידות.